

樊昌信《通原理》第六版 80 学时
课后典型习题分析及详解

杨辉 编著

西安邮电大学通信与信息工程学院

2011-9

目录

第一章 绪论	1
第二章 确知信号	7
第三章 随机过程	14
第四章 信道	29
第五章 模拟调制系统	33
第六章 数字基带传输系统	57
第七章 数字带通传输系统	78
第九章 模拟信号的数字传输	97
第十章 数字信号的最佳接收	111
第十一章 差错控制编码	120
第十三章 同步原理	130

第一章 绪论

1. 分析：消息 x 中所包含的信息量 I 与消息出现的概率 $P(x)$ 有关，满足

$$I = \log_2 \frac{1}{P(x)} = -\log_2 P(x) \quad (\text{比特})$$

解： e 的信息量

$$I_e = \log_2 \frac{1}{P(e)} = -\log_2 P(e) = -\log_2 0.105 = 3.25 \quad (\text{比特})$$

x 的信息量

$$I_x = \log_2 \frac{1}{P(x)} = -\log_2 P(x) = -\log_2 0.002 = 8.97 \quad (\text{比特})$$

评注：(1) 信息量的单位是比特，是正的，有些同学在做题时忽略了负号，得到一个负的信息量，注意别闹这样的笑话。

(2) 消息出现的概率越小，其所含的信息量就越大，消息出现的概率越大，其所含的信息量就越小。譬如有同学兴冲冲地告诉你，“确切消息，今天学校食堂 12 点免费供应午餐”你知道后有什么感觉？这样的事件发生的概率实在太小了。你从这个消息中得到的信息量太多了，好些同学第四节课还没下时可能就悄悄溜走了。如果该同学告诉你“确切消息，今天学校食堂 12 点开饭”，你听了后又有什么感觉。这样的消息大概是百分之百，即以概率 1 发生的。你会认为这不是明摆着的事么，这样的消息毫无价值，即对于你而言，不包含什么信息量。

2. 分析：信源或信源符号集中各种符号出现的概率之和为 1，其平均信息量的计算就象求一个班的平均身高一样，用每一种身高乘以该身高出现的概率，就是对平均身高的贡献，把它加起来就是平均身高。因此，信源的平均信息量就是信源中各个符号对平均信息量的贡献之和。

解：平均信息量

$$\begin{aligned} H(x) &= -\sum_{i=1}^5 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{3}{16} \log_2 \frac{3}{16} - \frac{5}{16} \log_2 \frac{5}{16} \\ &= 0.5 + 0.75 + 0.453 + 0.524 \\ &= 2.23 \quad (\text{比特/符号}) \end{aligned}$$

评注：要注意信源中各种符号出现的概率之和为 1，平均信息量（熵）是各符号对平均信息量的贡献之和。

3. 分析：符号集中有四个符号，把它看做一个信源，这些符号出现的概率之和为 1，由此，可以计算出各符号出现的概率，进而计算出平均信息量。

解：第四个符号出现的概率

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = 1$$

$$P(x_4) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

平均信息量

$$\begin{aligned} H(x) &= -\sum_{i=1}^4 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \\ &= 0.5 + 0.75 + 0.5 \end{aligned}$$

$$= 1.75 \text{ (比特/符号)}$$

评注：要注意信源中各种符号出现的概率之和为 1，平均信息量（熵）是各符号对平均信息量的贡献之和。

4. 分析：该字有四种字母，即四种符号，就是一种四进制信源，由各字母出现的概率可以计算出平均信息量。这些字母正好可以用二位二进制表示，即 00、01、11、10，知道了每个二进制脉冲的宽度，就可以算出一个四进制码元的宽度，其倒数即为传码率，即每秒钟传输多少个码元，单位是波特，再知道了一个码元携带的信息量，就可以算出信息速率。

解：（1）

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = 1$$

等概出现时，各符号出现的概率都相等，均为 $\frac{1}{4}$ ，平均信息量为

$$H(x) = \log_2 M = \log_2 4 = 2 \text{ (比特/符号)}$$

一个字母对应二位二进制脉冲，属四进制符号，其码元宽度为

$$T = 2 \times 5 = 10 \text{ (ms)}$$

故等概时的平均信息速率

$$R_b = \frac{1}{T} = 100 \text{ (波特)}$$

传信率

$$R_b = R_b H(x) = 200 \text{ (比特/秒)}$$

（2）

$$\begin{aligned}
 H(x) &= -\sum_{i=1}^4 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\
 &= -\frac{1}{5} \log_2 \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{3}{10} \log_2 \frac{3}{10} \\
 &= 0.464 + 1 + 0.521
 \end{aligned}$$

$$= 1.985 \text{ (比特/符号)}$$

非等概时的平均信息速率

$$R_b = R_B H(x) = 195 \text{ (比特/秒)}$$

评注：(1) 在电通信中，信源中的各种符号最终都要变成电信号才能传输，若信源中有 M 种符号就对应 M 进制，需要 M 种码元。在这里要清楚，字母、符号、码元是一一对应的，即有几种字母就对应几种符号，也就对应几种码元。一般有 $M = 2^N$ ，即 M 进制一种符号或码元需要用 N 位二进制码元表示。

(2) 最大平均信息速率即最大传信率，在等概时出现，因此，求最大传信率就意味着等概这个前提条件。

5. 分析：“点”和“划”代表两种符号，因此，国际莫尔斯电码是由两种符号组成的，这两种符号出现的概率之和为 1。由此可以计算出它们各自的信息量及平均信息量。

解：(1) 设“点”出现的概率为 $P_{\text{点}}$ ，“划”出现的概率为 $P_{\text{划}}$ ，则有

$$\begin{cases} P_{\text{点}} + P_{\text{划}} = 1 \\ P_{\text{点}} = 3P_{\text{划}} \end{cases}$$

可得

$$P_{\text{点}} = \frac{3}{4} \quad P_{\text{划}} = \frac{1}{4}$$

因此，

$$\text{点的信息量 } I_{\text{点}} = -\log_2 P_{\text{点}} = -\log_2 \frac{3}{4} = 0.415 \text{ (比特)}$$

$$\text{划的信息量 } I_{\text{划}} = -\log_2 P_{\text{划}} = -\log_2 \frac{1}{4} = 2 \text{ (比特)}$$

(2) 点和划的平均信息量

$$\begin{aligned}
 H(x) &= -\sum_{i=1}^2 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\
 &= -\frac{3}{4} I_{\text{点}} - \frac{1}{4} I_{\text{划}}
 \end{aligned}$$

= 0.81 (比特/符号)

6. 分析: 信源中各符号出现的概率之和为 1, 由此可以计算出各符号的平均信息量, 再乘以每秒钟发送的符号数, 即为平均信息速率。

解: 每个符号的平均信息量

$$\begin{aligned} H(x) &= -\sum_{i=1}^{128} P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= -16 \times \frac{1}{32} \log_2 \frac{1}{32} - 112 \times \frac{1}{224} \log_2 \frac{1}{224} \\ &= 2.5 + 3.904 \end{aligned}$$

= 6.404 (比特/符号)

信源的平均信息速率

$$R_b = R_B H(x) = 6.404 \times 10^3 \quad (\text{比特/秒})$$

7. 分析: 当 M 进制信源中各符号出现概率相同的条件下各符号所携带的平均信息量最大, 为 $\log_2 M$ 比特/符号。因此, 知道了传码率 R_B , 即每秒钟传输码元或符号的数量, 就可以

算出传信率 $R_b = R_B \log_2 M$ 比特/秒。

解: 二进制系统传信率

$$R_b = R_B \log_2 M = 2400 \times \log_2 2 = 2400 \quad (\text{比特/秒})$$

当传码率不变时, 16 进制的传码率为

$$R_b = R_B \log_2 M = 2400 \times \log_2 16 = 9600 \quad (\text{比特/秒})$$

评注: 对于二进制系统, 等概时, 1 个码元携带 1 比特的信息量, 因此, 传码率和传信率在数值上相等。

8. 分析: 传信率乘以传输时间, 就得到了所传输的信息量; 而当信源中各符号等概出现时, 传输信息量的最大值。

解: (1) 平均信息量

$$\begin{aligned} H(x) &= -\sum_{i=1}^5 P(x_i) \log_2 P(x_i) \\ &= -\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{3}{16} \log_2 \frac{3}{16} - \frac{5}{16} \log_2 \frac{5}{16} \\ &= 0.5 + 0.75 + 0.453 + 0.524 \end{aligned}$$

= 2.23 (比特/符号)

传信率

$$R_b = R_B H(x) = 2.23 \times 10^3 \quad (\text{比特/秒})$$

1 小时传输的信息量

$$I = R_b \cdot t = 2.23 \times 10^3 \times 3600 = 8.028 \times 10^6 \quad (\text{比特})$$

(2) 等概时, 最大平均信息量

$$H(x) = \log_2 5 = 2.32 \quad (\text{比特/符号})$$

1 小时传输的最大信息量

$$I = R_b \cdot t = 2.32 \times 10^3 \times 3600 = 8.352 \times 10^6 \quad (\text{比特})$$

评注: 最大平均信息量和最大信息量这些概念中, 隐含了信源中各符号等概或在已给定部分概率下, 其它符号等概出现的前提条件。

9. 分析: 码元宽度的倒数即传码率, 知道了每一码元中含的平均信息量, 就可以计算出传信率。

解: (1) 二进制信号的传码率

$$R_B = \frac{1}{T} = 200 \quad (\text{波特})$$

等概时, 平均信息量为

$$H(x) = \log_2 2 = 1 \quad (\text{比特/符号})$$

传信率

$$R_b = R_B \log_2 M = 200 \quad (\text{比特/秒})$$

(2) 四进制时, 由于码元宽度不变, 故四进制的传码率不变

$$R_B = \frac{1}{T} = 200 \quad (\text{波特})$$

等概时, 平均信息量为

$$H(x) = \log_2 4 = 2 \quad (\text{比特/符号})$$

传信率

$$R_b = R_B \log_2 M = 400 \quad (\text{比特/秒})$$

评注: 码元宽度决定了传码率。

10. 分析: 通信中, 若不告诉各符号出现的概率, 都是默认等概条件成立。因此, 只需计算出所给时间内所传输的总码元数, 就可以计算出误码率。

解: 四进制传码率

$$R_B = \frac{R_b}{\log_2 M} = 1200 \quad (\text{波特})$$

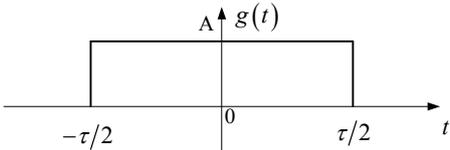
误码率

$$P_e = \frac{216}{1200 \times 30 \times 60} = 10^{-4}$$

评注：等概时，由于二进制一个码元含有 1 比特的信息量，故误码率和误信率相等。多进制时，由于一个码元含多个比特，一个码元出错了，有可能只错 1 比特，还有可能错 2 比特等等。因此，误信率和误码率不再相等。

第二章 确知信号

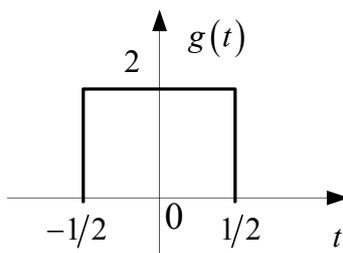
1. 分析：周期信号可以用傅里叶级数展开成直流分量、基波和各次谐波之和，这就是周期信号的分解及拟合原理。由傅里叶级数展开式可以很容易求出其频谱。这里，为简化计算，要用到如下规律。



$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A\tau}{\text{面积}} \cdot \text{sa} \left(\frac{2\pi f \cdot \frac{\tau}{2}}{\text{注意 门宽的一半}} \right)$$

这就需把题中所给周期函数加1。

证明： $s(t)$ 是周期为 2 的函数， $T = 2$ 。令 $s_1(t) = s(t) + 1$



$$s_1(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{j2\pi m t / T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{j2\pi m f_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{j\pi m t} \quad f_0 = 1/T = 1/2$$

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) e^{-j2\pi m f_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(t) e^{-j\pi m t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\pi m t} dt \\ &= \text{sa} \left(\frac{\pi m}{2} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{\pi m}{2}}{\pi m / 2} \end{aligned}$$

当 $m = 0$ 时， $C_0 = 1$ ， $e^{j\pi m t} = 1$

$m = 2n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ 时， $C_m = 0$

$$m = 2n + 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{时}, C_m = \frac{2 \times (-1)^n}{(2n + 1)\pi}, e^{j\pi mt} = \cos(2n + 1)\pi t$$

$$\text{故 } s_1(t) = s(t) + 1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{j\pi mt} = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)} \cos(2n + 1)\pi t$$

$$s(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)} \cos(2n + 1)\pi t$$

$$\text{当 } n = 0, -1; 1, -2; 2, -3; 3, -4; \dots \text{时}, s(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)} \cos(2n + 1)\pi t$$

故

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)} \cos(2n + 1)\pi t$$

评注：做周期信号的题时，一定要先观察周期函数有什么特点，尽量把它变化成能利用我们所熟知的规律和技巧来求解，掌握这些规律和技巧将使我们的学习变得轻松，把繁琐的解题过程变成一种乐趣。

5. 分析：所谓自相关函数就是自己与自己的相似程度，只不过是相隔时间 τ 后的相似程度，那肯定 τ 越大，相似程度越小。当 $\tau = 0$ 时，如果所给的信号是电压或电流信号，那自相关函数就是对瞬时功率的积分，出来就是平均功率。

解： $s(t) = A \cos \omega t$ 是周期性功率信号，其自相关函数为

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)s(t + \tau) dt$$

其中， $T_0 = 2\pi/\omega$ ，为该周期函数的周期。

自相关函数

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \omega t \cos \omega(t + \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [\cos \omega(2t + \tau) + \cos \omega\tau] dt \\ &= 0 + \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \omega\tau dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau \end{aligned}$$

平均功率

$$P = R(0) = \frac{A^2}{2}$$

评论：本题集中体现了

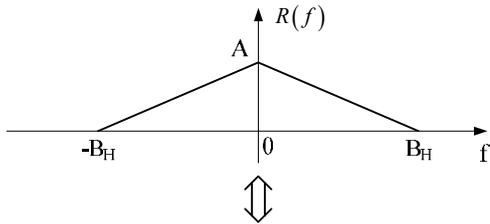
(1) 一个三角函数在其完整的周期内积分，结果肯定为 0，即

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos \omega(2t + \tau) dt = 0$$

对于 $\cos \omega(2t + \tau)$ 来说，在 $(-T_0/2, T_0/2)$ 内有两个完整的周期，故积分肯定为 0。

(2) 一个信号，譬如直流分量 A ，其平均功率显然为 A^2 ，但乘以 $\cos \omega t$ ，成为 $A \cos \omega t$ 后，平均功率减半，成了 $A^2/2$ 。如果把 A 换成其它的低频信号，该结论依然成立。这是一个规律，在第五章将得到广泛的应用。

6. 分析：能量信号的能量谱密度和自相关函数互为傅里叶变换对，因此，在求自相关函数是时，常常从频谱密度的角度入手，其模的平方即为能量谱密度。本题用到了下述规律。



$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(f) e^{j \frac{2\pi t f}{\text{注意}}} df$$

$$= \frac{AB_H}{\text{面积}} \cdot sa^2 \left(\frac{2\pi t \cdot \frac{2B_H}{4}}{\text{注意}} \right) = AB_H \cdot sa^2(\pi B_H t)$$

因此，知道了能量谱密度是抽样函数的平方，知道了它是由三角函数变换来的，由表达式就可以知道三角函数的门宽及幅度了。

解： $s(t)$ 的能量谱密度

$$G(f) = |S(f)|^2 = \left[\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right]^2 = sa^2(\pi f) = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times sa^2 \left(2\pi f \times \frac{2}{4} \right)$$

因此，自相关函数是一个高度为 1，门宽为 2 的时域三角形。

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f \tau} df = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

评注：通信原理注重的是对系统、概念及基本理论的理解和掌握，但许多同学却被信号、数学绊倒了。其实，通信原理中所用到的都是信号中极具规律性的东西，大家都学过信号，要经常翻书，多总结，把它们的规律找到，你就可以把主要精力放到通信原理本身，而不是纠缠到一大推数学上。

7. 分析：自相关函数和功率谱密度互为傅里叶变换。 $R(0)$ 就是信号的平均功率。本题用到如下规律。

$$e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

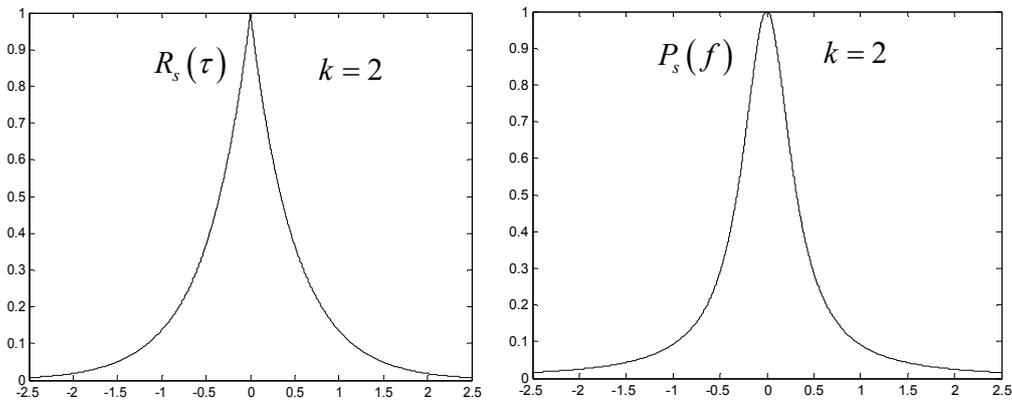
解：(1) 功率谱密度

$$P_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2} e^{-k|\tau|} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \frac{k}{2} \times \frac{2k}{k^2 + \omega^2} = \frac{k^2}{k^2 + 4\pi^2 f^2}$$

平均功率

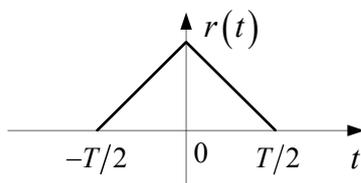
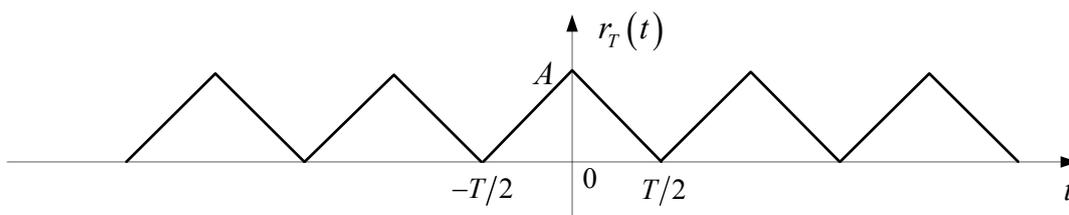
$$P = R_s(0) = \frac{k}{2}$$

(2)



评注：上述波形是用 Matlab 画出来的。这道题波形好些同学不会画，其实不难，想一下，如果放到高考中作为一道画图题，只让你画图形，我相信百分百的同学能拿到全分。为什么上了 2~3 年大学，却不会了。只能说明一个问题，自己没有对自己真正负起责任，没有把作业当成一种掌握知识，锻炼思维能力的手段，只是为了应付差事。如果大学四年都是这样应付过来的，那为什么要上大学呢？每个人都是一座未开发的宝藏，不过开发主要靠自己。

8. 分析：知道了信号的自相关函数为周期函数，则直接对自相关函数进行傅里叶变换就得到了该信号的功率谱密度。这里需要用到下述规律。



$$r_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n t/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad f_0 = 1/T$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r_T(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{AT}{2} \cdot sa^2 \left(\frac{2\pi n f_0 \cdot \frac{T}{4}}{\text{注意} \quad \text{门宽的四分之一}} \right) \\ &= \frac{A}{2} \cdot sa^2(\pi n f_0 T/2) = \frac{A}{2} \cdot sa^2(\pi n/2) \end{aligned}$$

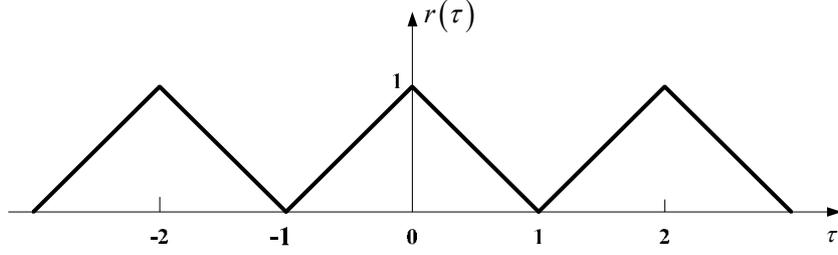
利用: $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$

$$e^{\pm j2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega \mp n\omega_0) = 2\pi\delta(\omega \mp 2\pi n f_0) = \delta(f \mp n f_0)$$

$$\begin{aligned} R_T(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} \cdot sa^2(\pi n/2) \cdot \frac{2\pi\delta(\omega - n\omega_0)}{\text{注意}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} \cdot sa^2(\pi n/2) \cdot \frac{\delta(f - n f_0)}{\text{注意}} = R_T(f) \end{aligned}$$

而三角形的傅里叶变换的规律前面已经提过了。

解: (1)



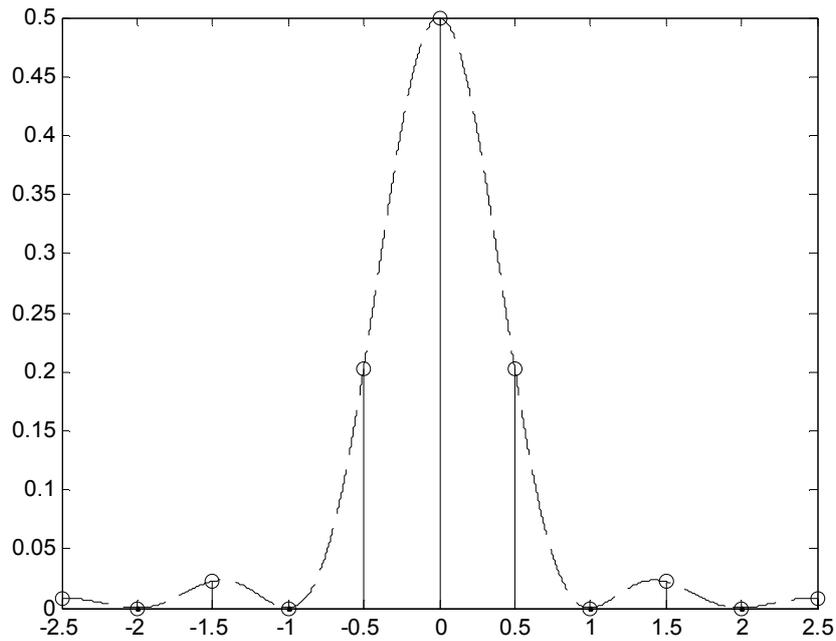
$$r(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n\tau/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 \tau} \quad f_0 = 1/T = 1/2$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(\tau) e^{-j2\pi n f_0 \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (1-|\tau|) e^{-j2\pi n f_0 \tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} (1-|\tau|) e^{-j2\pi n f_0 \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \times 1 \times sa^2 \left(2\pi n f_0 \times \frac{T}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} sa^2 (\pi n f_0 T / 2) \\ &= \frac{1}{2} sa^2 (\pi n / 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} sa^2 (\pi n / 2) 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} sa^2 (\pi n / 2) \delta(\omega - \pi n) \end{aligned}$$

$$R(f) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} sa^2 (\pi n / 2) \delta \left(f - \frac{n}{2} \right)$$

(2) 功率谱密度图是一个抽样函数的平方和冲击序列相乘的结果。



评注：注意求功率谱密度的两种方法：知道了自相关函数，则自相关函数的傅里叶变换就是功率谱密度；如果知道的是信号本身，就要先把信号本身的频谱计算出来，再利用频谱和功率谱密度之间的关系计算。画图时，用 Matlab 非常方便，这门语言很好学，是美国大学理工科学生必须掌握的四门语言之一，比 c 语言简单多了，称为“草稿纸“式的语言，目前，无孔不入，在众多领域都得到了广泛的应用，通信领域也不例外。这道题的结果很有意义，它说明在 $f_0 = 1/T = 1/2$ 处存在离散谱，该频率和数字基带信号（该信号是码元宽度，即周期为 2，占空比为 0.5 的矩形波）传码率相同，因此在接收端，可把该离散谱用中心频率为 f_0 窄带滤波器提取出来作为同步信息，这将在第六章数字基带传输系统学习。

第三章 随机过程

2. 分析：随机过程的统计特性是针对某一时刻的，在该时刻，随机过程的取值，即其各个样本函数的取值是一个随机变量，因此，求随机过程的统计特性就变成求其在某一时刻对应的随机变量的统计特性了。其次，在随机过程的统计特性中，我们的目标是随机变量，确知信号或确知量的均值即为其本身，方差为 0，因此，做随机过程的题关键是要分清哪些是随机的哪些是确知的，剩下的任务就是从随机过程的表达式出发剥“洋葱”，知道把所有的随机量和确知量全“剥”出来，答案一目了然，对于随机过程 $\xi(t) = 2\cos(2\pi t + \theta)$ ，怎样理解它是一个随机过程。 θ 是随机变量，因此，在任意给定的时刻， $\xi(t)$ 均为随机变量。所以，从时间上看， $\xi(t)$ 是由无数随机变量构成的，肯定是一个随机过程。因此，对于符号 $\xi(t)$ ，当时间 t 取某一特定值时，代表随机变量，否则，代表随机过程。此题中，当 t 给定时， $\cos 2\pi t$ 和 $\sin 2\pi t$ 都是确知的， θ 、 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 都是随机的。

解：均值

$$\begin{aligned} E_{\xi}(t) &= E[2\cos(2\pi t + \theta)] \\ &= 2E[\cos 2\pi t \cos \theta - \sin 2\pi t \sin \theta] \\ &= 2\cos 2\pi t \cdot E[\cos \theta] - 2\sin 2\pi t \cdot E[\sin \theta] \\ &= 2\cos 2\pi t \cdot \left(P(0)\cos 0 + P\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos \frac{\pi}{2} \right) - 2\sin 2\pi t \cdot \left(P(0)\cos 0 + P\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2\cos 2\pi t \cdot \frac{1}{2} - 2\sin 2\pi t \cdot \frac{1}{2} \\ &= \cos 2\pi t - \sin 2\pi t \end{aligned}$$

因此

$$E_{\xi}(1) = \cos 2\pi - \sin 2\pi = 1$$

自相关函数

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = E[2\cos(2\pi t_1 + \theta)2\cos(2\pi t_2 + \theta)]$$

$$\begin{aligned}
&= E[2 \cos(2\pi t_1 + \theta) 2 \cos(2\pi t_2 + \theta)] \\
&= 2E\{\cos[2\pi(t_1 + t_2) + 2\theta] + \cos 2\pi(t_1 - t_2)\} \\
&= 2E[\cos 2\pi(t_1 + t_2) \cos 2\theta - \sin 2\pi(t_1 + t_2) \sin 2\theta + \cos 2\pi(t_1 - t_2)] \\
&= 2 \cos 2\pi(t_1 + t_2) \cdot E[\cos 2\theta] - 2 \sin 2\pi(t_1 + t_2) \cdot E[\sin 2\theta] + 2 \cos 2\pi(t_1 - t_2)
\end{aligned}$$

$$R_{\xi}(0,1) = 2 \cos 2\pi \cdot E[\cos 2\theta] - 2 \sin 2\pi \cdot E[\sin 2\theta] + 2 \cos 2\pi$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left\{ P(0) \cos 0 + P\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \pi \right\} + 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

评注：这道题以“剥”洋葱的方式展示了随机过程统计特性的计算方法，如果，不告诉你具体时刻，就按“剥”洋葱的方法求解，思路很清晰。但如果告诉你具体时刻，你可以将这些时刻带进去，确知量和随机量一目了然，直接就可以做了。如这道题

$$E_{\xi}(1) = E[2 \cos(2\pi + \theta)] = 2E[\cos \theta] = 2 \left[P(0) \cos 0 + P\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2} \right] = 1$$

$$R_{\xi}(t_1, t_2) = E[2 \cos \theta 2 \cos(2\pi t + \theta)] = 4E[\cos^2 \theta] = 4 \left[P(0) \cos^2 0 + P\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos^2 \frac{\pi}{2} \right] = 2$$

4. 分析：“剥洋葱”，注意统计独立条件。

解：(1)

$$\begin{aligned}
R_z(\tau) &= E[z(t)z(t+\tau)] \\
&= E[X(t)Y(t)X(t+\tau)Y(t+\tau)] \\
&= E[X(t)X(t+\tau)Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E[X(t)X(t+\tau)]E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= R_X(\tau)R_Y(\tau)
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
R_z(\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] \\
&= E\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)Y(t+\tau)]\} \\
&= E[X(t)X(t+\tau) + X(t)Y(t+\tau) + Y(t)X(t+\tau) + Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= R_X(\tau) + E[X(t)]E[Y(t+\tau)] + E[Y(t)]E[X(t+\tau)] + R_Y(\tau) \\
&= R_X(\tau) + 2a_X a_Y + R_Y(\tau)
\end{aligned}$$

5. 分析：“剥洋葱”，按第2题的方法分清哪些是确知的，哪些是随机的。当取某一时刻 t 时，

$z(t)$ 是一随机变量，当取无穷多个时刻时， $z(t)$ 是由无穷多个随机变量构成的，是随机过程。在任意时刻 $m(t)$ 、 θ 、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\cos 2\theta$ 都是随机变量， $\cos \omega_c t$ 、 $\sin \omega_c t$ 、 $\cos 2\omega_c t$ 都是确知的。注意统计独立条件， $m(t)$ 和 θ 、 $\cos \theta$ 、 $\sin \theta$ 、 $\cos 2\theta$ 之间都是统计独立的，解题时要充分利用这些条件。对于平稳随机过程的证明，无非是证明该随机过程满足两个条件：均值为常数和自相关函数与时间 t 无关，只与时间间隔 τ 有关。平稳随机过程的自相关函数与功率谱密度之间互为傅里叶变换，自相关函数在 $\tau = 0$ 的取值就是平均功率。这道题 $m(t)$ 的自相关函数是以表达式的方式给出的，把图画出来，你就知道它不过是个简单的三角形，而三角形的傅里叶变换规律在第二章第 8 题已经见过了，要会用。

解：(1) 随机变量 θ 由于在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布，其一维概率密度函数为

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

均值 $E[z(t)] = E[m(t) \cos(\omega_c t + \theta)]$

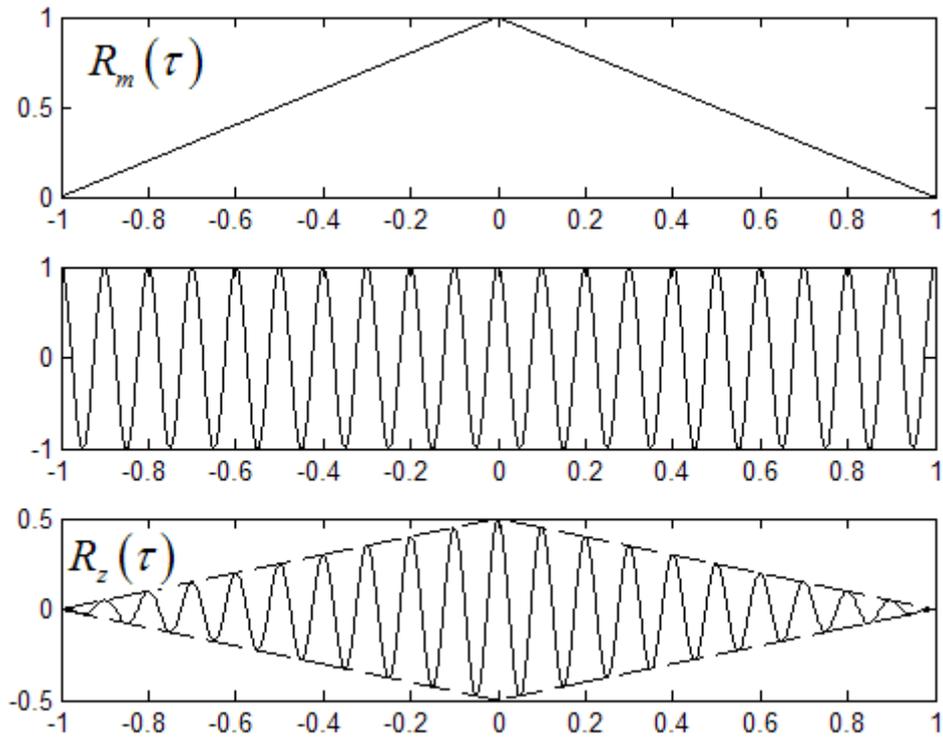
$$\begin{aligned} &= E[m(t) \cos \omega_c t \cos \theta - m(t) \sin \omega_c t \sin \theta] \\ &= \cos \omega_c t \cdot E[m(t) \cos \theta] - \sin \omega_c t \cdot E[m(t) \sin \theta] \\ &= \cos \omega_c t \cdot E[m(t)] E[\cos \theta] - \sin \omega_c t \cdot E[m(t)] E[\sin \theta] \\ &= \cos \omega_c t \cdot E[m(t)] \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos \theta d\theta - \sin \omega_c t \cdot E[m(t)] \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E[z(t) z(t + \tau)] \\ &= E\{m(t) \cos(\omega_c t + \theta) m(t + \tau) \cos[\omega_c(t + \tau) + \theta]\} \\ &= \frac{1}{2} E\{m(t) m(t + \tau) [\cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + 2\theta) + \cos \omega_c \tau]\} \\ &= \frac{1}{2} R_m(\tau) E[\cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + 2\theta)] + \frac{1}{2} R_m(\tau) \cos \omega_c \tau \\ &= \frac{1}{2} R_m(\tau) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + 2\theta) d\theta + \frac{1}{2} R_m(\tau) \cos \omega_c \tau \\ &= \frac{1}{2} R_m(\tau) \cos \omega_c \tau \end{aligned}$$

该随机过程均值为常数，自相关函数与时间 t 无关，只与时间间隔 τ 有关。满足平稳随机过程的条件，故为平稳随机过程。

(2) $R_z(\tau)$ 的波形



(3) 功率谱密度

$$P_m(f) = \int_{-1}^1 R_m(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = sa^2(\pi f)$$

$$P_z(f) = \int_{-1}^1 R_z(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{2} P_m(f) * \frac{1}{2} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)]$$

$$= \frac{1}{4} [sa^2[\pi(f + f_c)] + sa^2[\pi(f - f_c)]]$$

$$\text{功率 } S = R_z(0) = \frac{1}{2}$$

评注：(1) 该题画自相关函数 $R_z(\tau)$ 的波形时，好些同学不知道怎么画。通信中，最直观的表达方式是框图或图形，因此，你碰到一个复杂的表达式时，不要被表象迷糊，要采用“化整为零”的方法按区间，根据加减把各部分的图形画出来，再根据表达式对应相加减或相乘即可，往往图形出来了，其傅里叶变换或反变换的结果也就一目了然了。本题中 $R_m(\tau)$ 是个三角形，其功率谱密度肯定是抽样函数的平方，即 $sa^2(x)$ ，其系数是三角形的面积，其参数是三角形门宽的四分之一。 $\cos \omega\tau$ 怎么画，由于三角形门宽为 2，在这个门宽中，最好包含整数倍个 $\cos \omega\tau$ 周期，本题用 Matlab 画时，三角形门宽里包含 20 个 $\cos \omega\tau$ 周期，

当然，你也可以设到小些，这样好画图，对应相乘即可。

(2) 求自相关函数时，不要一上来就套公式，有时就把你给“套”进去了，要用我们熟知的规律，这道题就用到了频移公式，而频移公式的基础是欧拉定理。学到第5章大家就知道，该公式是通信的基石，即调制解调原理，大家在信号中就已经把通信原理的精华学到了。

(3) 这道题对 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$ 的积分结果为 0，可以直接看出来。因为它们在 $(0, 2\pi)$ 有 1 个完整的周期，其积分结果肯定为 0。所以，对于 $\cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + 2\theta)$ 的积分，因为 $2\omega_c t + \omega_c \tau$ 与 θ 无关， $\cos(2\omega_c t + \omega_c \tau + 2\theta)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有 2 个完整的周期，其积分结果也肯定为 0，这些应该作为常识掌握，将给运算带来意想不到的收获。

6. 分析：对自相关函数进行傅里叶变换，就得到了功率谱密度，该题要用到如下规律。

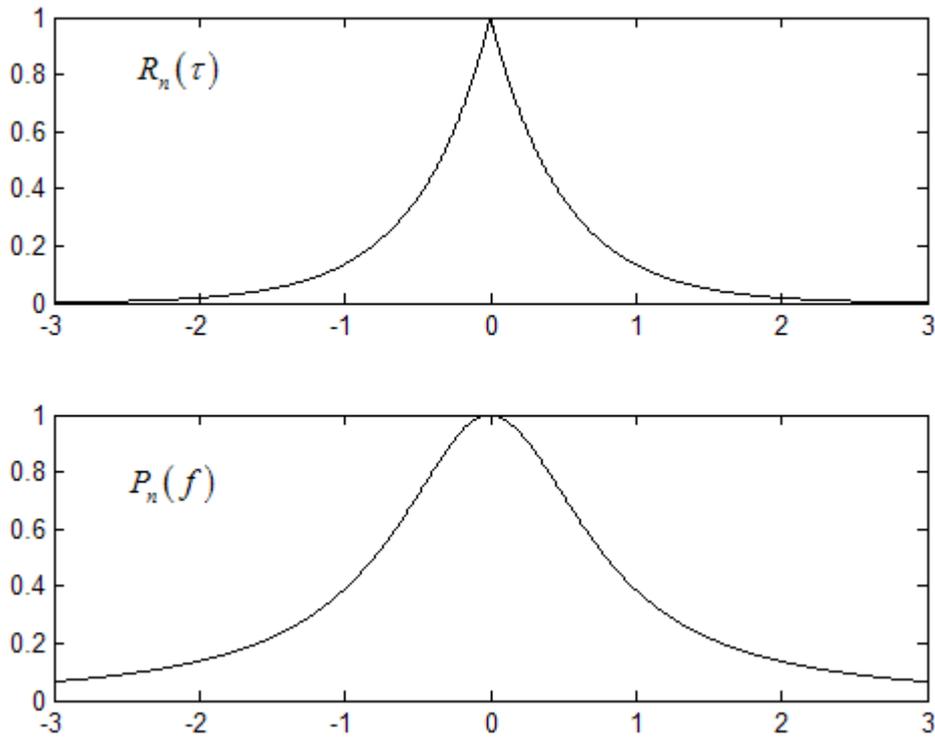
$$e^{-a|\tau|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

解：(1) 功率谱密度

$$\begin{aligned} P_n(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_n(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2} e^{-k|\tau|} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{k}{2} \times \frac{2k}{k^2 + \omega^2} = \frac{k^2}{k^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

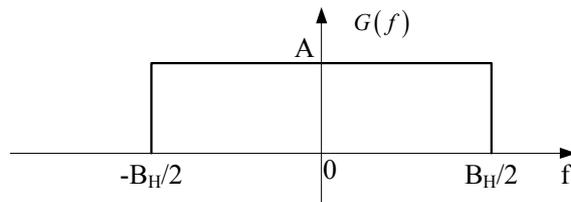
$$\text{功率 } N = R_n(0) = \frac{k}{2}$$

(2) 当 $k = 2$ 时，自相关函数 $R_n(\tau)$ 和功率谱密度 $P_n(f)$ 图形如下。



评注：Matlab 是一门用途广泛的简单语言，在通信、电子、信号处理领域有着广阔的应用前景，希望大家能把它作为一种重要的工具来应用。

8. 分析：高斯白噪声通过线性系统其均值等于输入噪声均值乘以系统传输函数在 $\omega = 0$ 处的取值。功率谱密度等于输入功率谱密度乘以系统传输函数模的平方。可以看到，系统传输函数是理想带通滤波器，因此，输出噪声的功率谱密度的形状与理想带通滤波器是一样的，就可以考虑是一个低通白噪声平移到 $\pm f_c$ 处的结果，而低通白噪声的功率谱是一个矩形，其傅里叶反变换反变换的规律和第二章第 1 题变换的规律是一样的。即频域门函数的傅里叶反



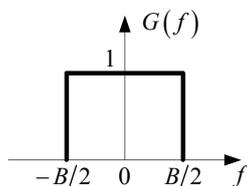
$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df \\
 &= \frac{AB_H}{\text{面积}} \cdot \underset{\text{注意}}{sa} \left(\underset{\text{门宽的一半}}{\frac{2\pi t \cdot B_H}{2}} \right) = AB_H \cdot sa(\pi B_H t)
 \end{aligned}$$

变换是抽样函数即 $sa(x)$ 函数，其系数是门函数的面积，其参数是门宽的一半。注意到所给传输函数是频域门函数分别搬移到 $\pm f_c$ 的结果，利用频移特性 $m(t) e^{\pm j\omega_c t} \Leftrightarrow M(\omega \mp \omega_c)$ 和

欧拉公式 $e^{\pm j\omega_c t} = \cos \omega_c t \pm j \sin \omega_c t$ ，即可完成该题的求解。

解：(1) 令

$$G(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq B/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df = B \text{sinc}(\pi Bt)$$

$$P_o(f) = P_i(f) |H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{n_0}{2}, & f_c - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$P_o(f) = \frac{n_0}{2} [G(f + f_c) + G(f - f_c)]$$

$$R_o(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_o(f) e^{j2\pi f\tau} df = \frac{n_0}{2} B \text{sinc}(\pi B\tau) [e^{-j\omega_c \tau} + e^{j\omega_c \tau}] = n_0 B \text{sinc}(\pi B\tau) \cos \omega_c \tau$$

(2)

$$N_o = P_o(f) \times 2B = \frac{n_0}{2} \times 2B = n_0 B$$

(3) 设高斯白噪声 $n_i(t)$ ，输出噪声为 $n_o(t)$ ，则高斯白噪声通过线性系统为窄带高斯白噪声。

其一维概率密度服从高斯分布。

$$E[n_o(t)] = E[n_i(t)] H(0) = 0$$

故输出噪声方差等于其平均功率

$$\sigma^2 = n_0 B$$

其一维概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_0 B}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n_0 B}\right)$$

评注：分析问题是解决问题的关键，大学的培养目标之一就是提高大家的分析解决问题的能力，不要怕浪费时间，你越怕浪费，它溜得就越快。你花两分钟的时间分析问题，找到行之有效的解决办法，剩下的在很短时间内就完成了。别人花 20 分钟做的事，你花 10 分钟就搞

定了。平时注意规律的积累，用到时才能想起，否则，无从谈起。

9. 分析：高斯白噪声通过线性系统其均值等于输入噪声均值乘以系统传输函数在 $\omega = 0$ 处的取值。功率谱密度等于输入功率谱密度乘以系统传输函数模的平方。题中给出的是 RC 电路。电容的阻抗是 $\frac{1}{j\omega C}$ 。

解：(1) RC 低通滤波器的传输函数

$$H(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

输出噪声的功率谱密度为

$$P_o(\omega) = P_i(\omega) |H(\omega)|^2 = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

输出噪声的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_o(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_o(f) e^{-j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{4RC} \cdot \frac{2/RC}{(1/RC)^2 + \omega^2} e^{-j2\pi f\tau} d\omega \\ &= \frac{n_0}{4RC} e^{-\frac{1}{RC}|\tau|} \end{aligned}$$

(2) 根据随机过程通过线性系统的性质，输出噪声是高斯噪声，其一维概率密度函数服从高斯分布。

$$E[n_o(t)] = E[n_i(t)] H(0) = 0$$

$$\sigma^2 = R_o(0) - R_o(\infty) = \frac{n_0}{4RC}$$

一维概率密度函数

$$f(x) = \sqrt{\frac{2RC}{\pi n_0}} \exp\left(-\frac{2RC}{2n_0} x^2\right)$$

评注：(1) 电容的阻抗为 $\frac{1}{j\omega C}$ ，可以看到，随着 ω 的增加，阻抗逐渐减小，因此，信号中的高频分量就更易于通过，当 $\omega = 0$ ，阻抗无穷大，直流分量就通不过。这就是电容的作用，通交流隔直流。在这类电路中，电容 C 也起着旁路电容的作用，即把不需要的高频分量滤掉。因此， RC 电路是低通滤波器，即滤除高频分量，使信号中的低频分量通过，即滤除高

频分量，滤出低频分量。

(2) 碰到类似 $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 这样的功率谱密度，就要想到利用 $e^{-|at|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ ，把所给功率谱密度变成 $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 的标准形式，就可以直接得到结论。

10. 分析：与第 9 题是一类题，高斯白噪声通过线性系统其均值等于输入噪声均值乘以系统传输函数在 $\omega = 0$ 处的取值。功率谱密度等于输入功率谱密度乘以系统传输函数模的平方。

题中给出的是 LR 电路。电感的阻抗是 $j\omega L$ 。

解：(1) LR 低通滤波器的传输函数

$$H(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L}$$

输出噪声的功率谱密度为

$$P_o(\omega) = P_i(\omega) |H(\omega)|^2 = \frac{n_0}{2} \cdot \frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

输出噪声的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_o(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_o(f) e^{-j2\pi f\tau} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0 R}{4L} \cdot \frac{2R/L}{(R/L)^2 + \omega^2} e^{-j2\pi f\tau} df \\ &= \frac{n_0 R}{4L} e^{-\frac{R}{L}|\tau|} \end{aligned}$$

(2) 根据随机过程通过线性系统的性质 $E[n_o(t)] = E[n_i(t)]H(0) = 0$ ，故

$$\sigma^2 = R_o(0) - R_o(\infty) = \frac{n_0 R}{4L}$$

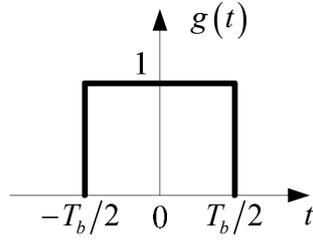
评注：(1) 电感的阻抗为 $j\omega L$ ，可以看到，随着 ω 的减小，阻抗逐渐减小，因此，信号中的低频分量就更易于通过，当 ω 增加时，阻抗逐渐增加阻，高频分量就很难通过。这就是电感的作用，通低频扼制高频，又叫高频扼流圈。因此， LR 电路是低通滤波器，即阻止高频分量，使信号中的低频分量通过，即扼制高频分量，滤出低频分量。

(2) 与第 9 题一样，碰到类似 $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 这样的功率谱密度，就要想到利用 $e^{-|at|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ ，把所给功率谱密度变成 $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ 的标准形式，就可以直接得到结论。

11. 分析：这道题的难度有点超标，简单的方法是用第 6 章学的双极性信号的功率谱密度反

过来求解其自相关函数。这里探讨一下直接求自相关函数的方法。

解：令



随机二进制序列中的“1”码用 $g_1(t) = g(t)$ 表示；“0”码用 $g_0(t) = -g(t)$ 表示，“1”和“0”出现的概率相同，即 $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ 。

该随机二进制矩形脉冲可以表示成

$$\xi(t) = \sum_n a_n g(t - nT_b)$$

其中， a_n 以等概率取 ± 1 ，+1 是“1”码的取值，-1 是“0”码的取值，故 a_n 是随机变量。

可以先对该随机信号的任一样本函数在 $(-NT_b, NT_b)$ 求时间自相关，然后对所有样本函数的时间自相关求均值，就得到了该随机信号的时间自相关函数。

$$\begin{aligned} \overline{R(\tau)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \xi(t) \xi(t+\tau) d\tau \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} \xi(t) \xi(t+\tau) d\tau \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} \sum_m \sum_n a_m a_n g(t - mT_b) g(t + \tau - nT_b) d\tau \\ \overline{R_\xi(\tau)} &= E[\overline{R(\tau)}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} \sum_m \sum_n E[a_m a_n] g(t - mT_b) g(t + \tau - nT_b) d\tau \\ a_m &= \begin{cases} 1, & P = 1/2 \\ -1, & P = 1/2 \end{cases}, \quad a_n = \begin{cases} 1, & P = 1/2 \\ -1, & P = 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

因此，自相关函数就转换为求 $a_m a_n$ 的均值了。

讨论：当 $m = n$ 时， $E[a_n^2] = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1$

当 $m \neq n$ 时，分三种情况： a_m 和 a_n 均以概率 $1/2$ 取 +1； a_m 和 a_n 均以概率 $1/2$ 取 -1； a_m 以概率 $1/2$ 取 +1， a_n 均以概率 $1/2$ 取 -1 及 a_m 以概率 $1/2$ 取 -1， a_n 均以概率 $1/2$ 取 +1。即

$$a_m a_n = \begin{cases} 1, & P(1)P(0) = 1/4 \\ 1, & P(1)P(0) = 1/4 \\ -1, & 2P(1)P(0) = 1/2 \end{cases}$$

因此, $E[a_m a_n] = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$

自相关函数只与 $m = n$ 时 $E[a_m a_n]$ 的取值有关, 故

$$\begin{aligned} \overline{R_\xi(\tau)} &= E[\overline{R(\tau)}] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} \sum_n E[a_n^2] g(t-nT_b) g(t+\tau-nT_b) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} \sum_n g(t-nT_b) g(t+\tau-nT_b) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} \sum_n \int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} g(t-nT_b) g(t+\tau-nT_b) dt \end{aligned}$$

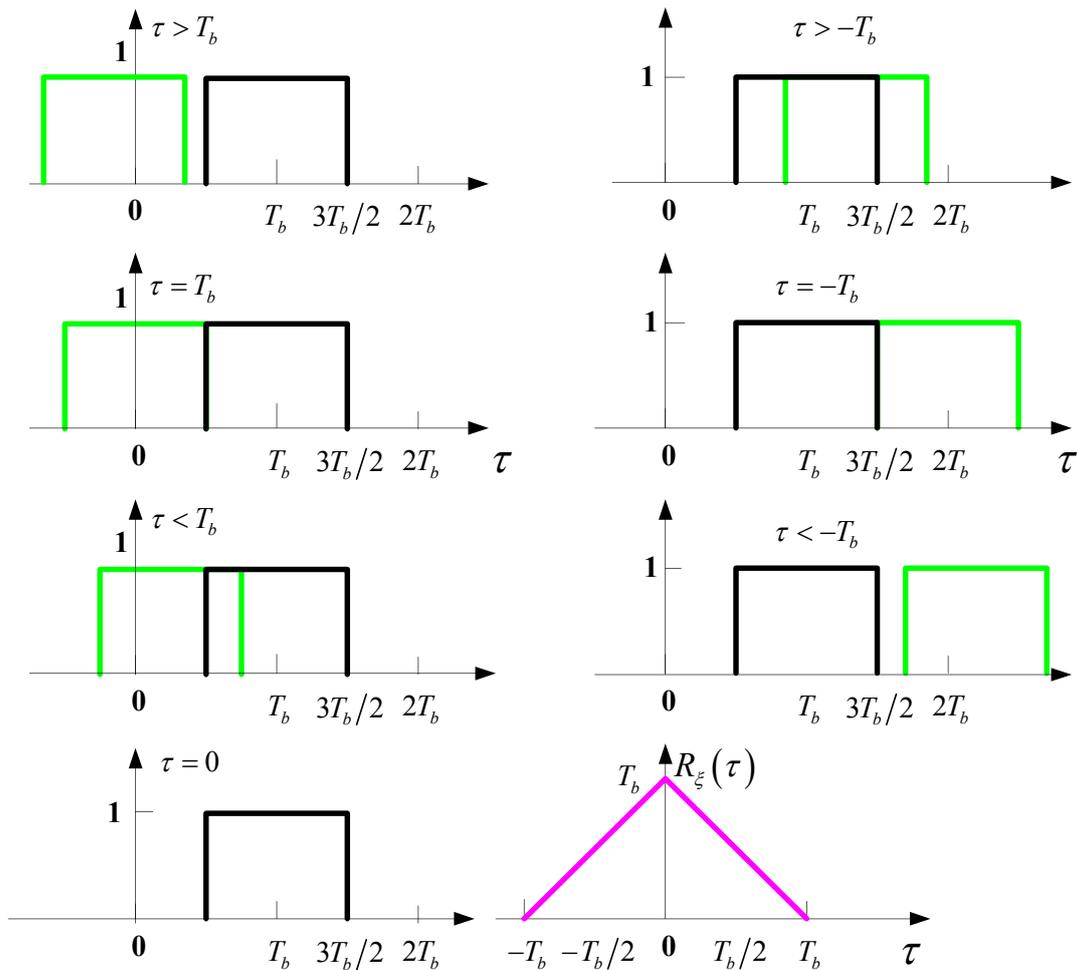
当 $|\tau| > T_b$ 时, $g(t-nT_b)$ 和 $g(t+\tau-nT_b)$ 不相交, 其乘积为 0, 故只需在 $|\tau| \leq T_b$ 内计算

$R(\tau)$, 因此, 就转换成了两个矩形脉冲的自相关函数, 当 n 取 $[-N, N]$ 中任意整数值时,

其自相关函数只与 τ 有关, 而 $|\tau| \leq T_b$, 因此, n 取任意整数值自相关函数是一样的。不妨

令 $n=1$, 得到

$$\int_{-NT_b/2}^{NT_b/2} g(t-T_b) g(t+\tau-T_b) dt = T_b - |\tau|$$



故

$$\overline{R_\xi(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T_b} (2N+1)(T_b - |\tau|) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_b}, & |\tau| \leq T_b \\ 0, & |\tau| > T_b \end{cases}$$

(2) 功率谱密度

$$P_\xi(f) = \int_{-T_b}^{T_b} R_\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = T_b^2 \text{sinc}^2(\pi f T_b) = P_\xi(\omega)$$

评论：(1) 该题体现了如何将问题转化成数学模型，值得仔细体会，这也是第 6 章求数字基带信号连续谱的方法。

(2) 两个门宽相同的矩形自相关的结果是三角形。这和两个门宽相同的矩形卷积的规律是类似的，这在今后的学习中经常用到特别是第 10 章的匹配滤波器。

13. 分析：本题显然是将 $P_x(\omega)$ 的频谱搬移到了 $\pm\omega_c$ 处，利用频移公式即可得出结论。

解：

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$P(\omega \pm \omega_c) \Leftrightarrow R_x(\tau) e^{\mp j\omega_c \tau}$$

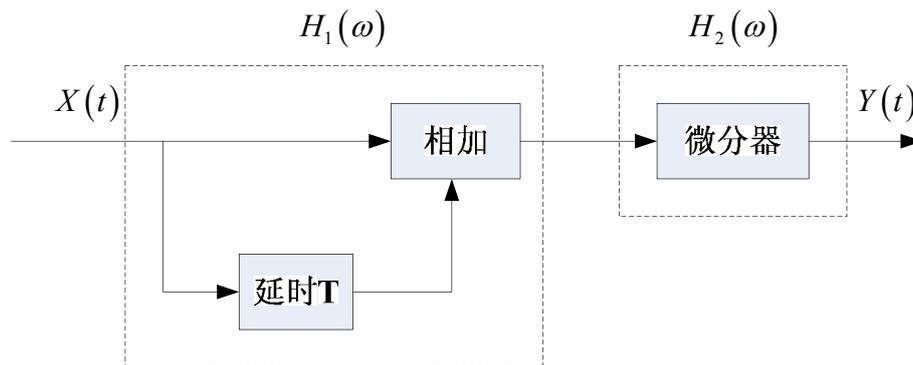
$$\frac{1}{2} [P(\omega + \omega_c) + P(\omega - \omega_c)] \Leftrightarrow \frac{1}{2} R_x(\tau) [e^{-j\omega_c \tau} + e^{-j\omega_c \tau}] = R_x(\tau) \cos \omega_c \tau$$

评注：熟练掌握频移公式是快速解决问题的关键，而频移公式又是通信中调制解调的原理。

14. 分析：系统中延迟器，加法器与微分器都是线性系统，因此，平稳随机过程通过线性系统仍旧是平稳随机过程。根据随机过程通过线性系统的性质，求输出随机噪声的功率谱密度首先要求系统的传输函数。而求系统冲击响应最简单的方法就是令输入信号为冲激。注意到，微分器的传输函数为 $j\omega$ 。以加法器为界限，该系统是由两部分构成的，因此分别找出两部分的传输函数相乘即可。

解：（1）因为所给系统是线性系统，其输入是平稳随机过程，故输出也是平稳随机过程。

（2）系统传输函数可分解为 $H_1(\omega)$ 和 $H_2(\omega)$ 的串联。



$$\begin{cases} h_1(t) = \delta(t) + \delta(t-T) \\ h_2(t) = \delta'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(\omega) = 1 + e^{-j\omega T} \\ H_2(\omega) = j\omega \end{cases}$$

故

$$H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) = (1 + e^{-j\omega T}) \cdot j\omega$$

输出功率谱密度

$$\begin{aligned} P_Y(\omega) &= P_X(\omega) |H(\omega)|^2 \\ &= P_X(\omega) |(1 + e^{-j\omega T}) \cdot j\omega|^2 \end{aligned}$$

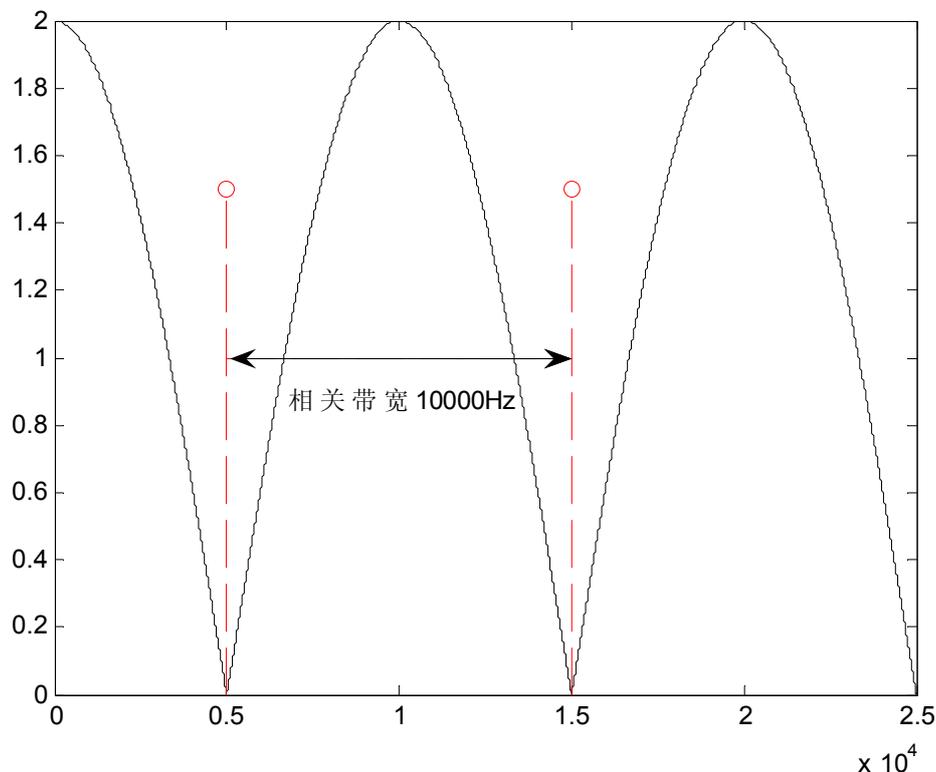
$$\begin{aligned}
&= P_X(\omega) \left| \left(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2} \right) e^{-j\omega T/2} \cdot j\omega \right|^2 \\
&= P_X(\omega) \left| 2 \cos \frac{\omega T}{2} e^{-j\omega T/2} \cdot j\omega \right|^2 \\
&= 2\omega^2 \left[2 \cos^2 \frac{\omega T}{2} \right] P_X(\omega) \\
&= 2\omega^2 (1 + \cos \omega T) P_X(\omega)
\end{aligned}$$

评注：(1) 碰到复杂的系统，为简化分析，需要将其分解成几个简单子系统的串联，则总的传输函数就是各子系统传输函数之和。

(2) $H_1(\omega)$ 其实就是两径信道，其幅频特性为

$$|H_1(\omega)| = \left| (1 + e^{-j\omega T}) \right| = \left| (e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}) e^{-j\omega T/2} \right| = 2 \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right|$$

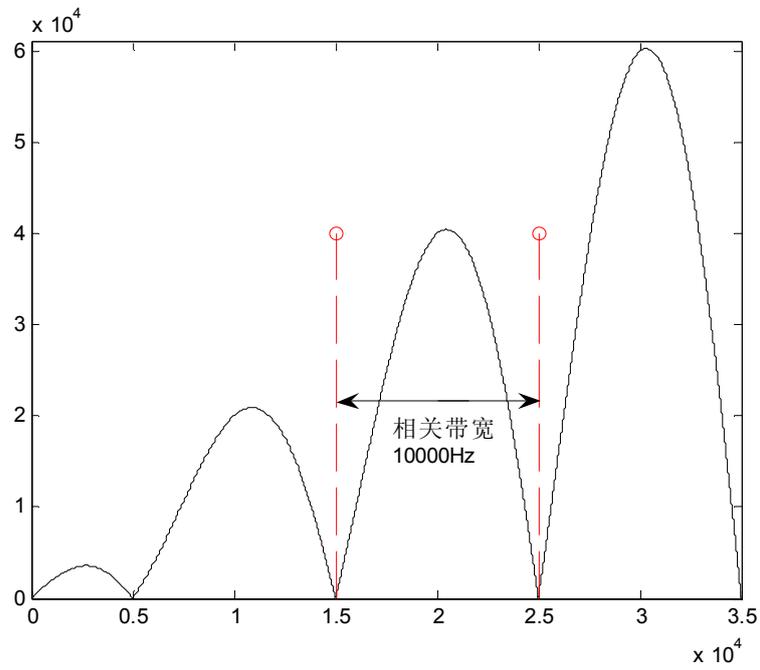
当 $T = 10^{-4}$ 秒时，得到幅频特性曲线，可以看到，当所传信号中心频率在 10000Hz，信号带



宽大于相关带宽时，一部分频率分量将被衰减掉，称之为频率选择性衰落，因此，实际中所传信号的带宽应小于相关带宽，我们可以看到，相关带宽是最大时延差的倒数，该题最大时延差为 $T = 10^{-4}$ 秒，故其相关带宽为 10000Hz。这将在第 4 章随参信道学到。

$$|H(\omega)| = |(1 + e^{-j\omega T}) \cdot j\omega| = |(e^{j\omega T/2} + e^{-j\omega T/2}) e^{-j\omega T/2} \omega| = 2 \left| \omega \cos \frac{\omega T}{2} \right|$$

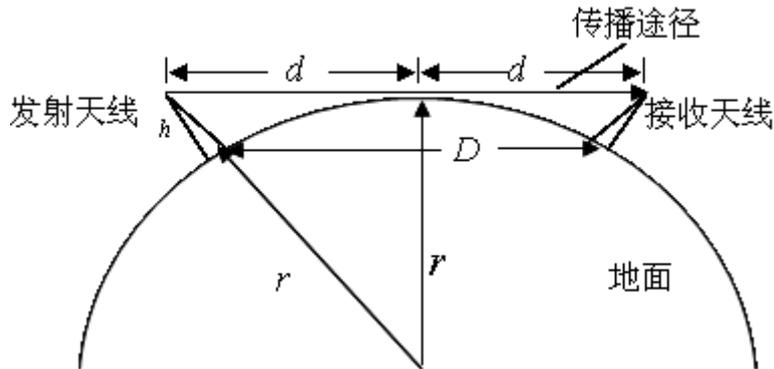
其幅频特性曲线为



第四章 信道

1. 分析：虽然平时我们看地面是平坦的，但地面是有曲率的，因此，在地球任意两点都看到对方的前提是你站的高度必须足够高。为什么空战中讲超视距攻击，就是不管你飞机飞得多高，你能直线看到对方的距离是有限的，超过这个距离，你就看不到了，成为超视距，双方在互相看不见的时候，你还能用导弹把对方打下来，就要借助高科技了。

解：视距传播示意图为



天线高度 h 是使收发天线之间保持视距的最低高度，则有

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2$$

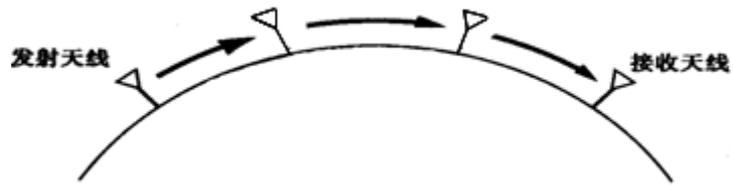
$$d = \sqrt{h^2 + 2rh} \approx \sqrt{2rh}$$

$$D = 2d$$

$$D^2 = 8rh$$

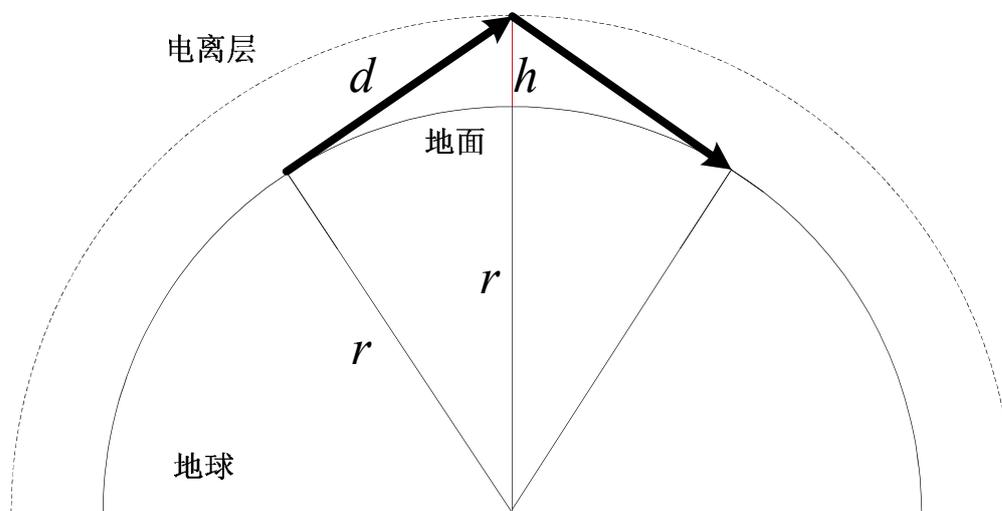
$$D = \sqrt{8rh} = \sqrt{8 \times 6370 \times 40 \times 10^{-3}} = 45.1 \text{ (Km)}$$

评注：虽然提高天线的高度可以增加视距传输距离，但天线的高度是有限的，不可能无限高下去，因此，视距传输的距离也是有限的。要实现超视距传输怎么办？像接力赛一样采用中继的办法，可以在地面每隔视距传播距离架设一个天线或直接通过卫星或飞艇进行中继，这样中继距离更远。因此，你也知道了，若没有军事卫星，超视距攻击怎么能进行？一般在发生大规模自然灾害时，正常的通信被中断时，应急通信往往是采用海事电话或地面建微波中继站的方式实现应急通信，要注意的是基站选择时，两基站中间要避开遮挡物。



2. 分析：采用电离层反射的方法可以大大提高通信距离，大家收音机上的短波电台采用的就是这种方式，大家会发现，晚上的接收效果可能要比白天好些。

解：电离层反射传输示意图



$$d^2 + r^2 = (r + h)^2$$

$$d = \sqrt{h^2 + 2rh}$$

$$D = 2d$$

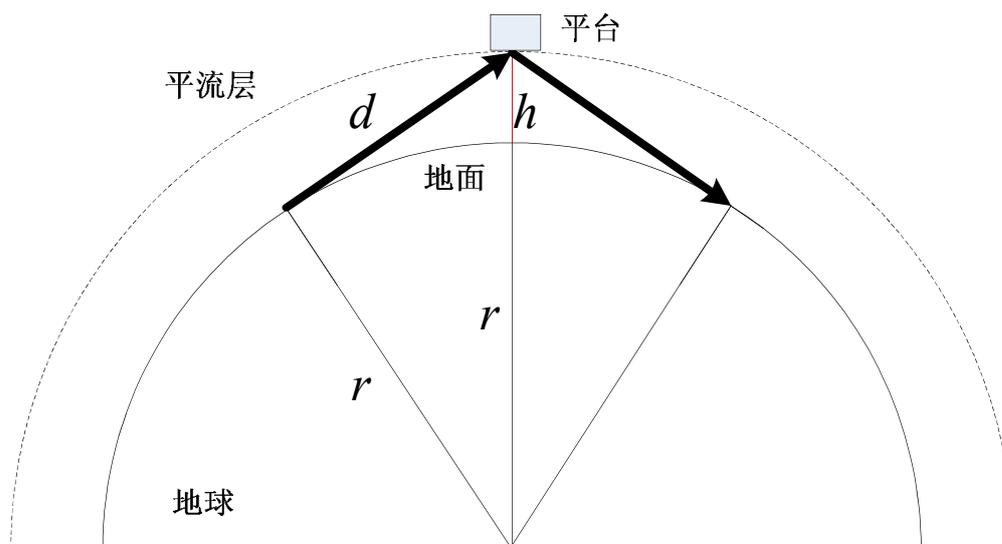
$$D = 2d = 2\sqrt{h^2 + 2rh} = 2\sqrt{400^2 + 2 \times 6370 \times \frac{4}{3} \times 400} = 2 \times 2637 = 5274 \text{ (Km)}$$

评注：(1)大家可以看到，经电离层一次反射就能传输几千公里，这就是为什么你的收音机收到的短波电台虽在千里之外发射，还仍能收到的原因。

(2)相对于电离层的高度而言，地面天线的高度可忽略不计。

3. 分析：采用平流层平台转发的方法可以大大提高通信距离。

解：



$$d^2 + r^2 = (r + h)^2$$

$$d = \sqrt{h^2 + 2rh}$$

$$D = 2d$$

$$D = 2d = 2\sqrt{h^2 + 2rh} = 2\sqrt{20^2 + 2 \times 6370 \times \frac{4}{3} \times 20} = 583 \text{ (Km)}$$

评注：（1）应了一句古话“站得高看得远”。

（2）相对于平流层的高度而言，地面天线的高度可忽略不计。

7. 分析：黑白相片是由像素构成的，而像素又是由不同亮度电平构成的，正是这些亮度电平以某一概率出现，才使黑白相片成为可能，故相片的信量携带在像素上，而像素携带多少信量由其亮度电平出现的概率决定。这些相片传输时的传信率应小于等于信道容量，故信道容量应大于等于其传信率。由此，在信噪比给定的条件下，可以计算出所需最小带宽。需注意的是这里信噪比是以分贝的形式给出，要化成比值的形式，很显然，10 分贝即为 10 倍。

解：（1）

因为每个像素独立地以等概率取 16 个亮度电平，故每个像素的信息量为

$$I_p = -\log_2 \frac{1}{16} = 4 \text{ (比特/像素)}$$

每幅图像的信息量为

$$I_F = 400 \times 10^4 \times 4 = 1.6 \times 10^7 \text{ (比特/幅)}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10 \lg \frac{S}{N} = 10, \quad \frac{S}{N} = 10$$

$$R_b \leq C_t = B \log_2(1 + S/N) = 3000 \times \log_2(1 + 10) = 10.4 \times 10^3 \text{ (比特/秒)}$$

$$I_F = R_b t$$

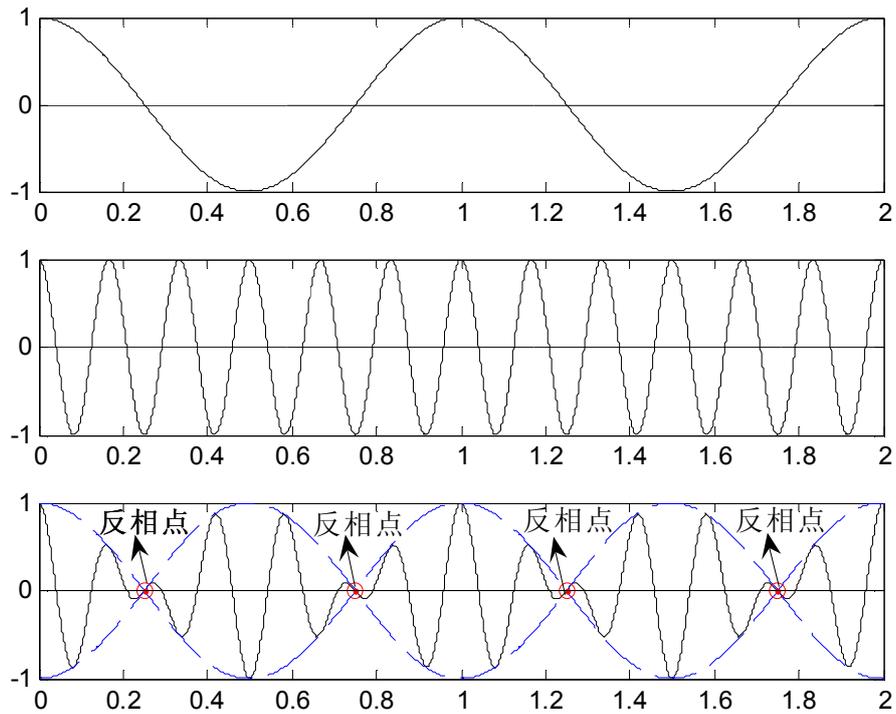
$$t \geq \frac{I_F}{R_b} = \frac{1.6 \times 10^7}{10.4 \times 10^3} = 1540 \text{ (秒)} = 25.67 \text{ (分钟)}$$

故所需最短时间为 25.67 分钟。

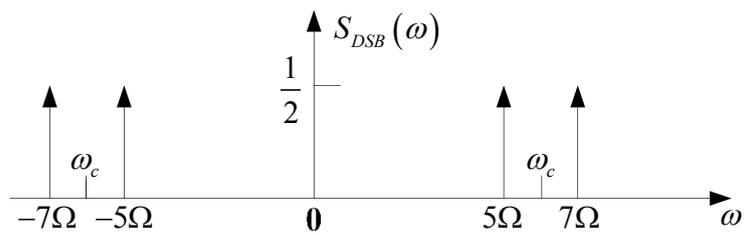
第五章 模拟调制系统

1. 分析：画 DSB-SC 和 AM 波形时，要把调制信号和载波一一对齐画，注意反相点。

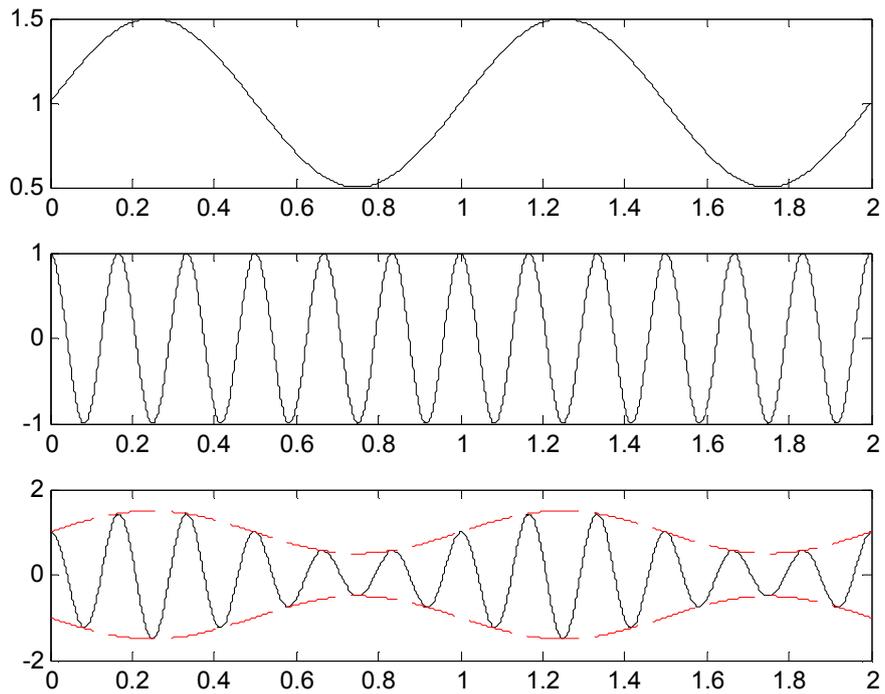
解： $\cos\Omega t \cos\omega_c t$



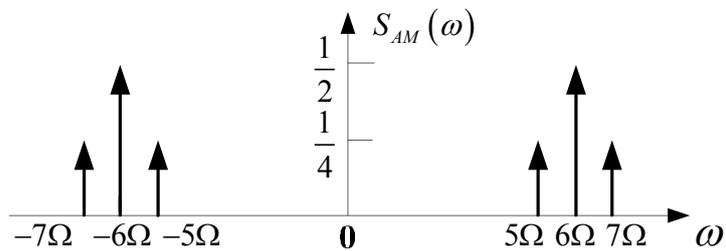
频谱图



$$(1 + 0.5 \cos\Omega t) \cos\omega_c t$$



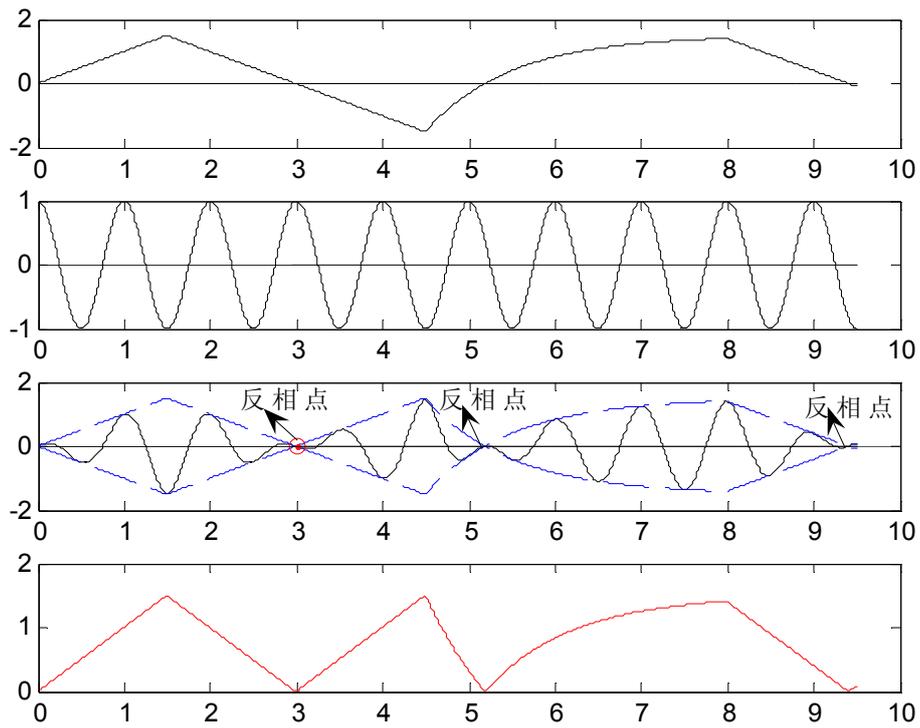
频谱图



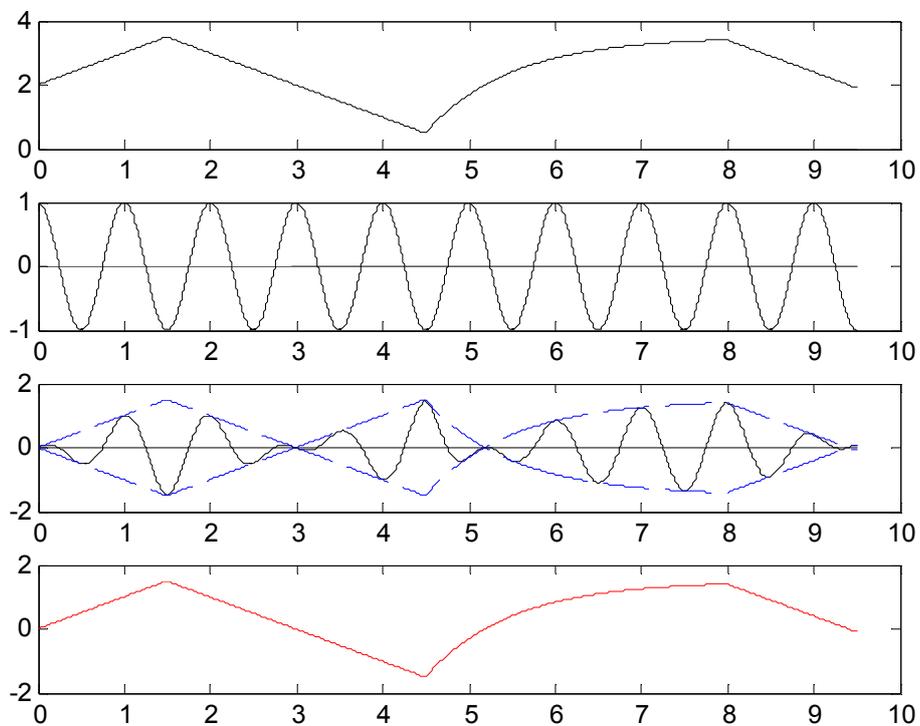
评注：注意 DSB-SC 的反相点的画法，为什么 AM 可以采用包络检波法而 DSB-SC 不能，从上面两个图的比较中可以看出，AM 之所以能采用包络检波法解调，因为不存在反相点。信息都包含在 AM 信号的包络里。大家也就清楚了，DSB-SC 不能采用包络检波法的原因，是因为在 DSB-SC 中，信息不仅包含在包络里，还包含在反相点里，因此，采用包络检波法就把反相点的信息丢掉了，导致解调输出信号严重失真。

2. 分析：画 DSB-SC 和 AM 波形时，要把调制信号和载波一一对齐画，注意反相点。

解：DSB-SC



AM



可以看到，由于二极管的单向导电性，DSB-SC 信号通过包络检波器后恢复的信号相对于调制信号发生了严重失真，AM 信号通过包络检波器后恢复了调制信号。

评论：包络检波器只能检出 DSB-SC 信号的包络中包含的信息，反相点中包含的信息检不出来，因此，解调波形在调制信号两个相邻过零点处取负电平的部分都将发生失真，即该部分的包络发生了反向，AM 信号由于无反相点，信息全部包含在包络里，因此，大信噪比时，通过包络检波法可正常解调。

3. 分析：所谓单边带调制是在双边带的基础上滤除一个边带即可，保留上边带或下边带。

设调制信号为 $m(t)$ ，可写成 $m(t) = \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t$ ，其中 ω_i 是 $m(t)$ 中的频率分量， m_i 是对应的幅度。则 DSB-SC（抑制载波双边带信号）为

$$m(t) \cos \omega_c t = \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t \cos \omega_c t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c + \omega_i)t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c - \omega_i)t$$

很显然 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c + \omega_i)t$ 为上边带信号， $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c - \omega_i)t$ 为下边带信号，因此，

$$\begin{aligned} s_{USB}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c + \omega_i)t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t \cos \omega_c t - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sin \omega_i t \sin \omega_c t = \frac{1}{2} m(t) \cos \omega_c t - \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{LSB}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c - \omega_i)t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t \cos \omega_c t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sin \omega_i t \sin \omega_c t = \frac{1}{2} m(t) \cos \omega_c t + \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

$$\hat{m}(t) = \sum_{i=1}^n m_i \cos\left(\omega_i t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{i=1}^n m_i \sin \omega_i t$$

解：DSB-SC 表达式为

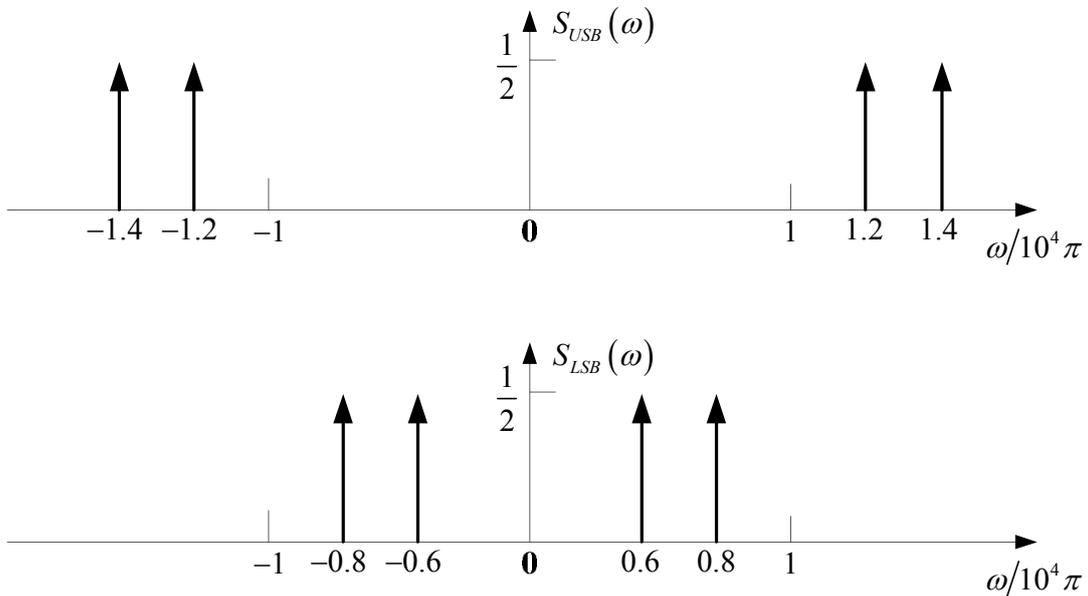
$$m(t) \cos \omega_c t = \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t \cos \omega_c t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c + \omega_i)t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c - \omega_i)t$$

上边带信号

$$s_{USB}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c + \omega_i)t = \frac{1}{2} [\cos 12000\pi t + \cos 14000\pi t]$$

下边带信号

$$s_{LSB}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_c - \omega_i)t = \frac{1}{2} [\cos 8000\pi t + \cos 6000\pi t]$$



评注：学通原不能死学死记，要从基本原理入手理解通原，这些基本原理都是很简单的，要会用它们推出有用的结论。通原的一大特点是表达式和框图一一对应，因此，由单边带信号表达式可以很容易画出框图，这就是理解记忆。

4. 分析：残留边带滤波器满足载频处的奇对称性，故由奇对称点可以一眼看出载波频率，即该点的横坐标，为 10KHz，这样就可以写出 AM 信号的表达式，通过残留边带滤波器后，一个边带的频谱被保留（但在奇对称点以上的滚降边，上边带频谱的形状已经发生了变化，下边带只留下与滚降边对应的小部分）。

解： $f_c = 10 \text{ KHz}$

令 $A_0 \geq |m(t)|_{\max}$ ，则

$$\begin{aligned} s_{AM}(t) &= [A_0 + m(t)] \cos \omega_c t = [A_0 + A \sin 100\pi t + A \sin 6000\pi t] \cos 20000\pi t \\ &= A_0 \cos 20000\pi t + \frac{A}{2} [\sin 20100\pi t - \sin 19900\pi t + \sin 26000\pi t - \sin 14000\pi t] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{AM}(f) &= \frac{A_0}{2} [\delta(f+10000) + \delta(f-10000)] - \frac{jA}{4} [\delta(f-10050) - \delta(f+10050)] \\ &\quad + \frac{jA}{4} [\delta(f-9950) - \delta(f+9950)] - \frac{jA}{4} [\delta(f-13000) - \delta(f+13000)] \\ &\quad + \frac{jA}{4} [\delta(f-7000) - \delta(f+7000)] \end{aligned}$$

残留边带滤波器在对上述频点的衰减为

$$H(f) = \begin{cases} 0, f \leq 9.5\text{KHz} \\ f - 9.5, 9.5\text{KHz} < f \leq 10.5\text{KHz} \\ 1, 10.5\text{KHz} < f \leq 14\text{KHz} \\ 0, f > 14\text{KHz} \end{cases}$$

因此，输出残留边带信号频谱为

$$S_{VSB}(f) = \frac{A_0}{4} [\delta(f+10000) + \delta(f-10000)] - \frac{j0.55A}{4} [\delta(f-10050) - \delta(f+10050)] \\ + \frac{j0.45A}{4} [\delta(f-9950) - \delta(f+9950)] - \frac{jA}{4} [\delta(f-13000) - \delta(f+13000)]$$

因此，输出残留边带信号为

$$s_{VSB}(t) = \frac{A_0}{2} \cos 20000\pi t + \frac{A}{2} [0.55 \sin 20100\pi t - 0.45 \sin 19900\pi t + \sin 26000\pi t]$$

评注：残留边带信号并不是完整保留了一个边带，两个边带在奇对称点两侧滚降边上都受到了衰减，但保留的一个边带被衰减掉的与另一个边带残留的部分是奇对称的，因此，残留边带信号的频谱中刚好保留了调制信号的全部信息。在本题的结论中 10.05KHz 和 9.95KHz 是关于载频对称的，二者之和恰好包含了调制信号中的 $A \sin 100\pi t$ 所携带的全部信息。

5. 分析：该题有两种分析思路，数学推导和图解法。在数学推导中，一定要从双边带信号

出发来考察经过滤波器之后的信号，令 $m(t) = \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t$ ，剩下的分析思路与第 3 题是

一样的。图解法直观明了。要从 $\cos \omega_c t$ 和 $\sin \omega_c t$ 的频谱入手，利用频移公式进行求解。

解法 1：令载频 $\omega_1 = \omega_{c1}$ ， $\omega_2 = \omega_{c2}$

上支路：

$$\text{令 } m(t) = \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t$$

则

$$m(t) \cos \omega_{c1} t = \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t \cos \omega_{c1} t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_{c1} + \omega_i) t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_{c1} - \omega_i) t$$

经过截止频率为 ω_1 的理想低通滤波器，得到下边带信号

$$s_{LSB}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_{c1} - \omega_i) t$$

经过二级调制

$$\begin{aligned} s_{LSB}(t) \cos \omega_{c2} t &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_{c1} - \omega_i) t \cos \omega_{c2} t \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_{c2} + \omega_{c1} - \omega_i) t + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n m_i \cos[\omega_{c2} - (\omega_{c1} - \omega_i)] t \end{aligned}$$

下支路:

$$m(t) \sin \omega_{c1} t = \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t \sin \omega_{c1} t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sin(\omega_{c1} + \omega_i) t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sin(\omega_{c1} - \omega_i) t$$

经过截止频率为 ω_1 的理想低通滤波器, 得到下边带信号

$$s_{LSB}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sin(\omega_{c1} - \omega_i) t$$

经过二级调制

$$\begin{aligned} s_{LSB}(t) \sin \omega_{c2} t &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sin(\omega_{c1} - \omega_i) t \sin \omega_{c2} t \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n m_i \cos(\omega_{c2} + \omega_{c1} - \omega_i) t + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n m_i \cos[\omega_{c2} - (\omega_{c1} - \omega_i)] t \end{aligned}$$

故经加法器后

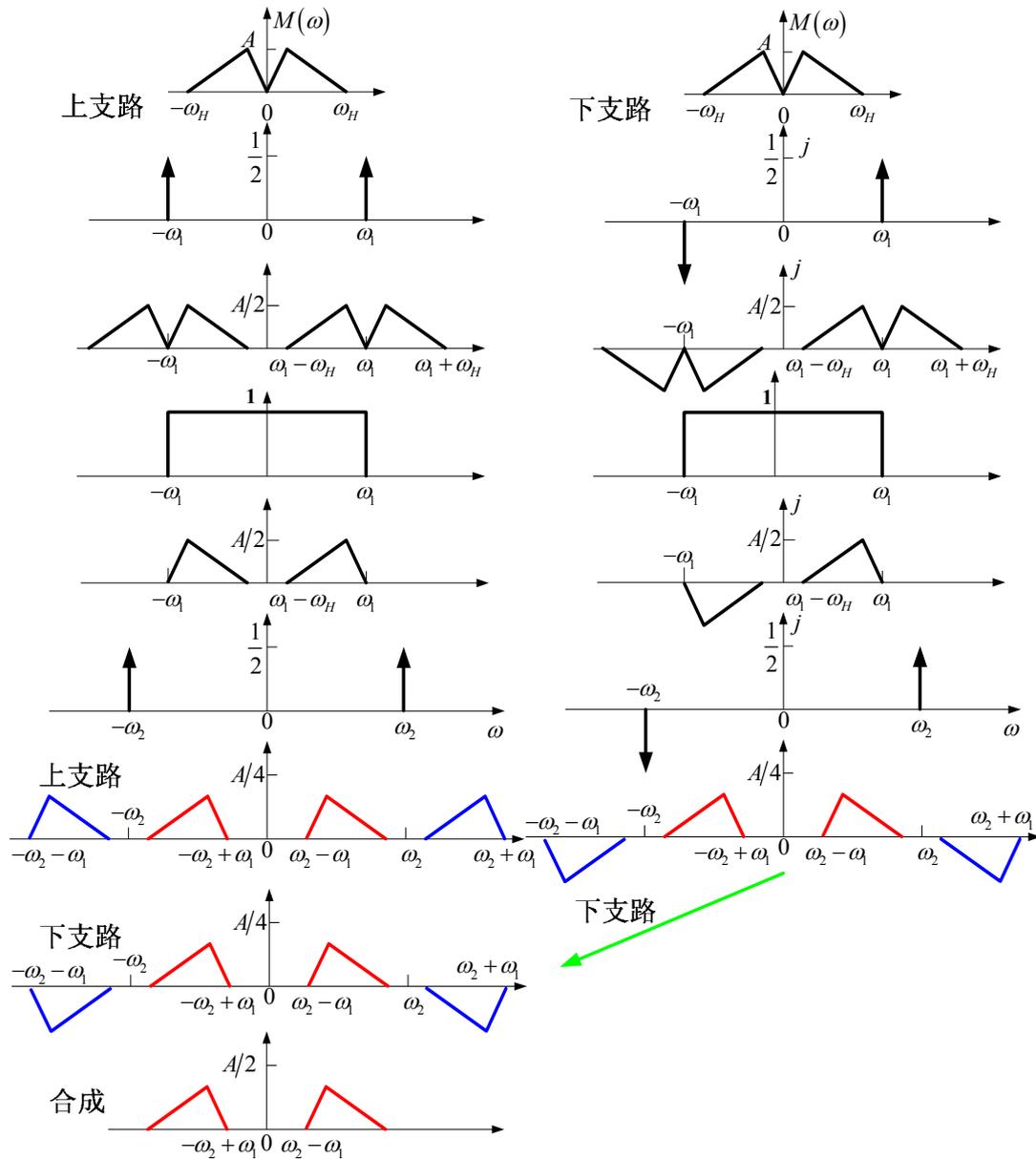
$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos[\omega_{c2} - (\omega_{c1} - \omega_i)] t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos[\omega_{c2} - \omega_{c1} + \omega_i] t \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \cos \omega_i t \cos(\omega_{c2} - \omega_{c1}) t - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \sin \omega_i t \sin(\omega_{c2} - \omega_{c1}) t \\ &= \frac{1}{2} m(t) \cos(\omega_{c2} - \omega_{c1}) t - \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin(\omega_{c2} - \omega_{c1}) t \end{aligned}$$

因此, 输出信号

$$s(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\omega_2 - \omega_1) t - \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin(\omega_2 - \omega_1) t$$

是一个载频为 $\omega_2 - \omega_1$ 的上边带信号。

解法 2:



因此，输出信号

$$s(t) = \frac{1}{2} m(t) \cos(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{1}{2} \hat{m}(t) \sin(\omega_2 - \omega_1)t$$

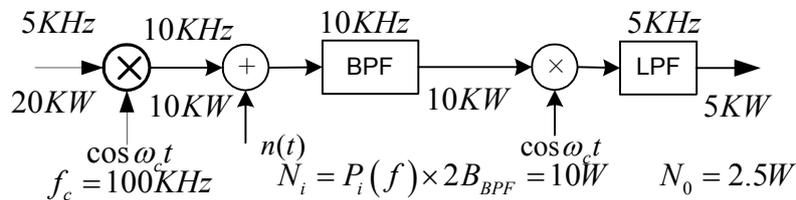
是一个载频为 $\omega_2 - \omega_1$ 的上边带信号。

评注：双边带信号是基础，由双边带信号出发，可得到其它幅度调制信号，最直观的就是单边带信号，因此，单边带信号的表达式完全没必要死记，记不住的话推一下就出来了，表达式一出来，产生框图也就出来了。时域和频域是分析通信原理的两大工具，大家需要把最基本的方法和规律掌握了，这只占信号与系统的很小的一部分，在第二章的习题中已经给大家展示过了。因此，不要怕自己数学没学好，信号没学好，通原就学不好！掌握那些规律，就

扫除了你学习中数学上的障碍。

7. 分析：该题和第 8、9、11、13 和 14 是同一类题。所用的方法和规律是一样的。首先要清楚调制解调框图，把系统框图画出来，在框图上标明两条主线：信号和噪声功率的变化规律，带宽的变化规律。再注意一下给出的是噪声单边带功率谱密度还是双边带功率谱密度即可。对于双边带系统而言，我们一般假定信道是传输函数为 1 的理想信道，接收端带通和低通滤波器都是传输函数为 1 的理想滤波器，如果不是，那简单，输入功率乘以传输函数的平方就是输出功率。但下面所述的基本规律是不变的。

对于 DSB/SC 系统，**信号功率变化的主线是：**已调信号因为是调制信号乘以振幅为 1 的载波，平均功率减半，即为调制信号平均功率 P_m 的一半，有些同学会问，如果乘的载波是 $k \cos \omega_c t$ 呢？很简单，在原来的基础上乘以 k^2 即可。因为信道和带通滤波器是理想的，因此，已调信号到达接收端时没有损耗，因此，解调器输入信号功率等于已调信号功率，即边带功率 P_s ，经过相干解调器后，平均功率再减半。如果题中告诉你一条边带功率怎么办？很简单，双边带信号是由上下两条边带构成的，这两条边带的功率相等，知道了一条，另一条也就知道了，故双边带信号功率是一条边带的 2 倍。**噪声功率变化的主线是：**窄带高斯白噪声通过相干解调器后，平均功率减为四分之一。**带宽变化的主线：**若调制信号带宽或截止频率为 f_H ，已调信号带宽加倍为 $2f_H$ ，接收端带通滤波器的作用是完整取出已调信号，最大限度的抑制带外噪声，故其带宽就等于已调信号带宽，为 $2f_H$ ，中心频率即为载波的频率；低通滤波器是为了滤除 2 倍频，取出恢复的调制信号，因此它的带宽要刚好等于调制信号的带宽，为 f_H 。明白了以上流程，把它在系统框图上标



出来，解答过程就变得轻而易举了。需注意，所给噪声的功率谱密度是双边带还是单边带功率谱密度，若是双边带 $N_i = \frac{n_0}{2} \times 2B_{BPF} = P_i(f) \times 2B_{BPF}$ ，如果是单边带 $N_i = n_0 \times B_{BPF} = P_i(f) \times B_{BPF}$ 。对于输出噪声的功率谱密度，看你是求单边带还是双边带功率谱密度，因为输出噪声是经过低通滤波器的，故双边带功率谱密度利用

$N_0 = P_o(f) \times 2B_{LPF}$ 算，单边带功率谱密度用 $N_0 = P_o(f) \times B_{LPF}$ 算，但要在做的过程中指明你是求双边带还是单边带功率谱密度。

解：（1）理想带通滤波器的中心频率为载波频率，等于 100KHz，通带宽度等于已调信号带宽，为 10KHz。

（2）解调器输入信号功率 $S_i = P_s = 10$ (KW)

解调器输入噪声平均功率

$$N_i = \frac{n_0}{2} \times 2B_{BPF} = P_i(f) \times 2B_{BPF} = 0.5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^4 = 10 \text{ (W)}$$

解调器输入信噪比

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{10^4}{10} = 1000$$

（3）解调器输出信号功率 $S_0 = \frac{1}{2} S_i = 5$ (KW)

解调器输出噪声平均功率

$$N_0 = \frac{1}{4} N_i = 2.5 \text{ (W)}$$

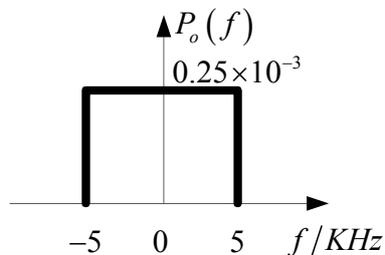
解调器输出信噪比

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{5000}{2.5} = 2000$$

或利用 $G_{DSB} = \frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = 2$ ，直接得到 $\frac{S_0}{N_0} = 2 \frac{S_i}{N_i} = 2000$

（4）解调器输出噪声双边带功率谱密度为

$$P_o(f) = \frac{N_0}{2B_{LPF}} = \frac{2.5}{2 \times 5 \times 10^3} = 0.25 \times 10^{-3} \text{ (W/Hz)}$$



评注：做完之后，是否有赏心悦目的感觉，若没有，下面还有几道题。

9. 分析：对于单边带系统而言，我们一般假定信道是传输函数为 1 的理想信道，接收端带

通和低通滤波器都是传输函数为 1 的理想滤波器，如果不是，那简单，输入功率乘以传输函数的平方就是输出功率。但下面所述的基本规律是不变的。

对于 SSB 系统，**信号功率变化的主线是：**已调信号因为是调制信号乘以振幅为 1 的载波，平均功率减半后，再滤除一个边带得到的，平均功率又减半，因此，单边带信号平均功率 P_s 为调制信号平均功率 P_m 的四分之一，有些同学会问，如果乘的载波是 $k \cos \omega_c t$ 呢？很简单，在原来的基础上乘以 k^2 即可。因为信道和带通滤波器是理想的，因此，已调信号到达接收端时没有损耗，因此，解调器输入信号功率等于已调信号功率，即边带功率 P_s ，经过相干解调器后，平均功率减为四分之一，故输出信号的平均功率是调制信号的 1/16。**噪声功率变化的主线是：**窄带高斯白噪声通过相干解调器后，平均功率减为四分之一。**带宽变化的主线：**若调制信号带宽或截止频率为 f_H ，已调信号带宽仍为 f_H ，接收端带通滤波器的作用是完整取出已调信号，最大限度的抑制带外噪声，故其带宽就等于已调信号带宽，为 f_H ，中心频率即为载波的频率加 $f_H/2$ ，即为 $f_c \pm \frac{f_H}{2}$ ；低通滤波器是为了滤除二倍频，取出恢复的调制信号，因此它的带宽要刚好等于调制信号的带宽，为 f_H 。再注意一下所给噪声的功率谱密度是双边带还是单边带功率谱密度，若是双边带 $N_i = \frac{n_0}{2} \times 2B_{BPF} = P_i(f) \times 2B_{BPF}$ ，如果是单边带 $N_i = n_0 \times B_{BPF} = P_i(f) \times B_{BPF}$ 。

解：（1）由于传输的是上边带信号，故带通滤波器的中心频率为

$$f_c + \frac{f_H}{2} = 100 + 2.5 = 102.5 \text{ (KHz)}$$

（2）解调器输入信号平均功率

$$S_i = P_s = 10 \text{ (KW)}$$

解调器输入噪声平均功率

$$N_i = P_i(f) \times 2B_{BPF} = 0.5 \times 10^{-3} \times 2 \times 5 \times 10^3 = 5 \text{ (W)}$$

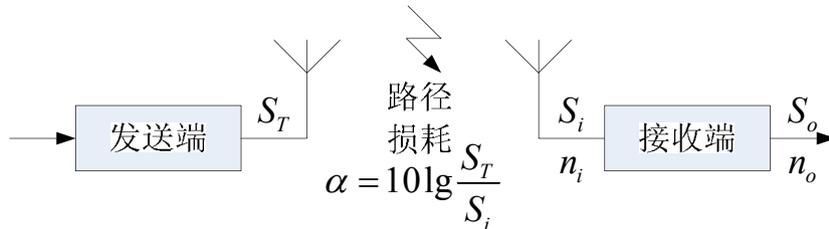
解调器输入信噪比

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{10^4}{5} = 2000$$

（3）解调器输出信噪比

$$G_{SSB} = \frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = 1, \text{ 直接得到 } \frac{S_0}{N_0} = \frac{S_i}{N_i} = 2000$$

10. 分析：该题和 18 题的分析思路是一样的。注意到信道已经不是理想信道了，有了传输损耗，因此，要根据传输损耗计算发射功率与接收功率之间的关系。



$$\left. \frac{S_o}{N_o} \right\} \Rightarrow \left. \frac{S_i}{N_i} \right\} \Rightarrow \left. \frac{S_i}{\alpha} \right\} \Rightarrow \left. \frac{S_T}{\alpha} \right\} \Rightarrow \left. \frac{S_i}{N_i = n_o B} \right\} \Rightarrow \left. \frac{S_o}{N_o} \right\} \Rightarrow \frac{S_o}{N_o}$$

调制增益 G 调制增益 G

解：

$$10\lg \frac{S_T}{S_i} = 100 \quad \frac{S_T}{S_i} = 10^{10}$$

$$10\lg \frac{S_0}{N_i} = 20 \quad \frac{S_0}{N_i} = 100$$

(1) 对于 DSB/SC 系统

输出信号功率

$$S_0 = 100N_i = 100 \times 10^{-9} = 10^{-7} \text{ (W)}$$

输入信号功率

$$S_i = 2S_0 = 2 \times 10^{-7} \text{ (W)}$$

发射信号功率

$$S_T = 10^{10} S_i = 10^{10} \times 2 \times 10^{-7} = 2000 \text{ (W)}$$

(2) 对于 SSB/SC 系统

输出信号功率

$$S_0 = 100N_i = 100 \times 10^{-9} = 10^{-7} \text{ (W)}$$

输入信号功率

$$S_i = 4S_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ (W)}$$

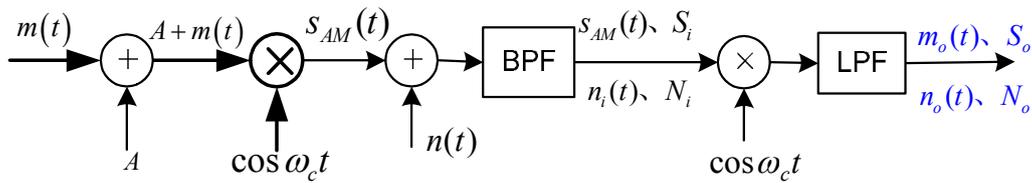
发射信号功率

$$S_T = 10^{10} S_i = 10^{10} \times 4 \times 10^{-7} = 4000 \text{ (W)}$$

评注：本题由于已经知道了输出噪声的平均功率了，因此，调制增益就用不上了，直接用解调器输入输出信号功率的关系就可以了。

12. 分析：这类题按照系统框图进行就可以了，但要注意解调器输出信噪比是指输出有用信号平均功率与输出噪声平均功率之比，这个有用信号不包括直流分量。

证：AM 同步检波系统为



$$s_{AM}(t) = [A + m(t)] \cos \omega_c t$$

$$s_{AM}(t) \cos \omega_c t = [A + m(t)] \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} [A + m(t)] + \frac{1}{2} [A + m(t)] \cos 2\omega_c t$$

经低通滤波器后，滤除二倍频，得到的有用信号是 $m_0(t) = \frac{1}{2} m(t)$ ，直流分量可以通过隔直电容滤除。

因此，解调器输入信号平均功率

$$S_i = P_s = \frac{1}{2} [A^2 + \overline{m^2(t)}]$$

解调器输入噪声平均功率

$$N_i = \frac{n_0}{2} \times 2 \times 2f_H = 2n_0 f_H$$

解调器输入信噪比

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{\frac{1}{2} [A^2 + \overline{m^2(t)}]}{2n_0 f_H} = \frac{[A^2 + \overline{m^2(t)}]}{4n_0 f_H}$$

解调器输出有用信号平均功率

$$S_o = \frac{1}{2} P_s = \frac{1}{4} \overline{m^2(t)}$$

解调器输出噪声平均功率

$$N_o = \frac{1}{4} N_i = \frac{n_0 f_H}{2}$$

解调器输出信噪比

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{\overline{m^2(t)}/4}{n_0 f_H / 2} = \frac{\overline{m^2(t)}}{2n_0 f_H}$$

调制增益

$$G_{AM} = \frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{\overline{m^2(t)}/2n_0 f_H}{\left[A^2 + \overline{m^2(t)} \right] / 4n_0 f_H} = \frac{2\overline{m^2(t)}}{A^2 + \overline{m^2(t)}}$$

13. 分析：该题和 8、9、11 是一类题。对于 AM 系统，**信号功率变化的主线是**：已调信号因为是直流分量加调制信号后乘以振幅为 1 的载波，平均功率均减半，即为直流分量和调制信号平均功率的一半之和，有些同学会问，如果乘的载波是 $k \cos \omega_c t$ 呢？很简单，在原来的基础上乘以 k^2 即可。因为信道和带通滤波器是理想的，因此，已调信号到达接收端时没有损耗，因此，解调器输入信号功率等于已调信号功率，即边带功率 P_s 加载频功率 P_c ，经过包络检波器后，恢复的有用信号等于调制信号，故其平均功率等于调制信号的平均功率。如果题中告诉你一条边带功率怎么办？很简单，AM 信号是由载频和上下两条边带构成的，这两条边带的功率相等，知道了一条，另一条也就知道了，故双边带信号的边带功率是一条边带的 2 倍。**噪声功率变化的主线是**：窄带高斯白噪声通过包络检波器后，输出是输入窄带高斯白噪声的同相分量，其平均功率就等于输入噪声的平均功率。**带宽变化的主线是**：若调制信号带宽或截止频率为 f_H ，已调信号带宽加倍为 $2f_H$ ，接收端带通滤波器的作用是完整取出已调信号，最大限度的抑制带外噪声，故其带宽就等于已调信号带宽，为 $2f_H$ ，中心频率即为载波的频率。

解：（1）解调器输入端信号平均功率

$$S_i = P_c + P_s = 10 + 40 = 50 \text{ (KW)}$$

解调器输入端噪声平均功率

$$N_i = P_i(f) \times 2B_{BPF} = 0.5 \times 10^{-3} \times 2 \times 2 \times 5 \times 10^3 = 10 \text{ (W)}$$

解调器输入端信噪比

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{50 \times 10^3}{10} = 5000$$

（2）解调器输出有用信号平均功率

$$S_i = P_m = 2P_s = 20 \text{ (KW)}$$

解调器输出端噪声平均功率

$$N_0 = N_i = 10 \text{ (W)}$$

解调器输出端信噪比

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{20 \times 10^3}{10} = 2000$$

(3) 制度增益

$$G_{AM} = \frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{2000}{5000} = \frac{2}{5}$$

15. 分析：前面讲过，抑制载波的幅度调制信号之所以不能采用包络检波法进行解调，是因为所携带的信息只有一部分在包络里，另一部分在反相点里。而反相点出现的原因是由于调制信号有过零点，因此，若能使调制信号无过零点，就可以采用包络检波法，这就是 AM 信号可以采用包络检波法的原因。所以，对于 DSB/SC、SSB/SC 和 VSB/SC 信号而言，如果能插入一个大的导频，使已调信号的包络无过零点，即可采用包络检波法。要证明结论，就需要找到接收信号的包络，而双边带信号通过残留边带滤波器后的时域表达式不明显，因此要考虑用线性调制相移法的一般模型来做。

证明：

$$s_{VSB}(t) = s_I(t) \cos \omega_c t + s_Q(t) \sin \omega_c t$$

$$s_I(t) = h_I(t) * m(t) \quad s_Q(t) = h_Q(t) * m(t)$$

$$h_I(t) = h(t) \cos \omega_c t \quad h_Q(t) = h(t) \sin \omega_c t$$

插入导频 $A \cos \omega_c t$ ，其中 $A \geq \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)}$ ，则接收信号为

$$s(t) = A \cos \omega_c t + s_{VSB}(t) = A \cos \omega_c t + s_I(t) \cos \omega_c t + s_Q(t) \sin \omega_c t + n_i(t)$$

由于在大信噪比下解调，包络检波器存在单独的有用信号和噪声，可以在忽略噪声的影响的条件下进行解调。即

$$\begin{aligned} s(t) &= A \cos \omega_c t + s_{VSB}(t) \\ &= (A + s_I(t)) \cos \omega_c t + s_Q(t) \sin \omega_c t \\ &= V(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] \end{aligned}$$

其中, $V(t) = \sqrt{[A + s_I(t)]^2 + s_Q^2(t)}$ 即为包络检波器的输出。

当 $[A + s_I(t)]^2 \gg s_Q^2(t)$, 有

$$V(t) = A + s_I(t)$$

其中 $s_I(t) = h_I(t) * m(t)$

由于 $h_I(t) = h(t) \cos \omega_c t$

$H_I(\omega) = \frac{1}{2} [H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)]$, 正好满足残留边带系统无失真传输的条件。

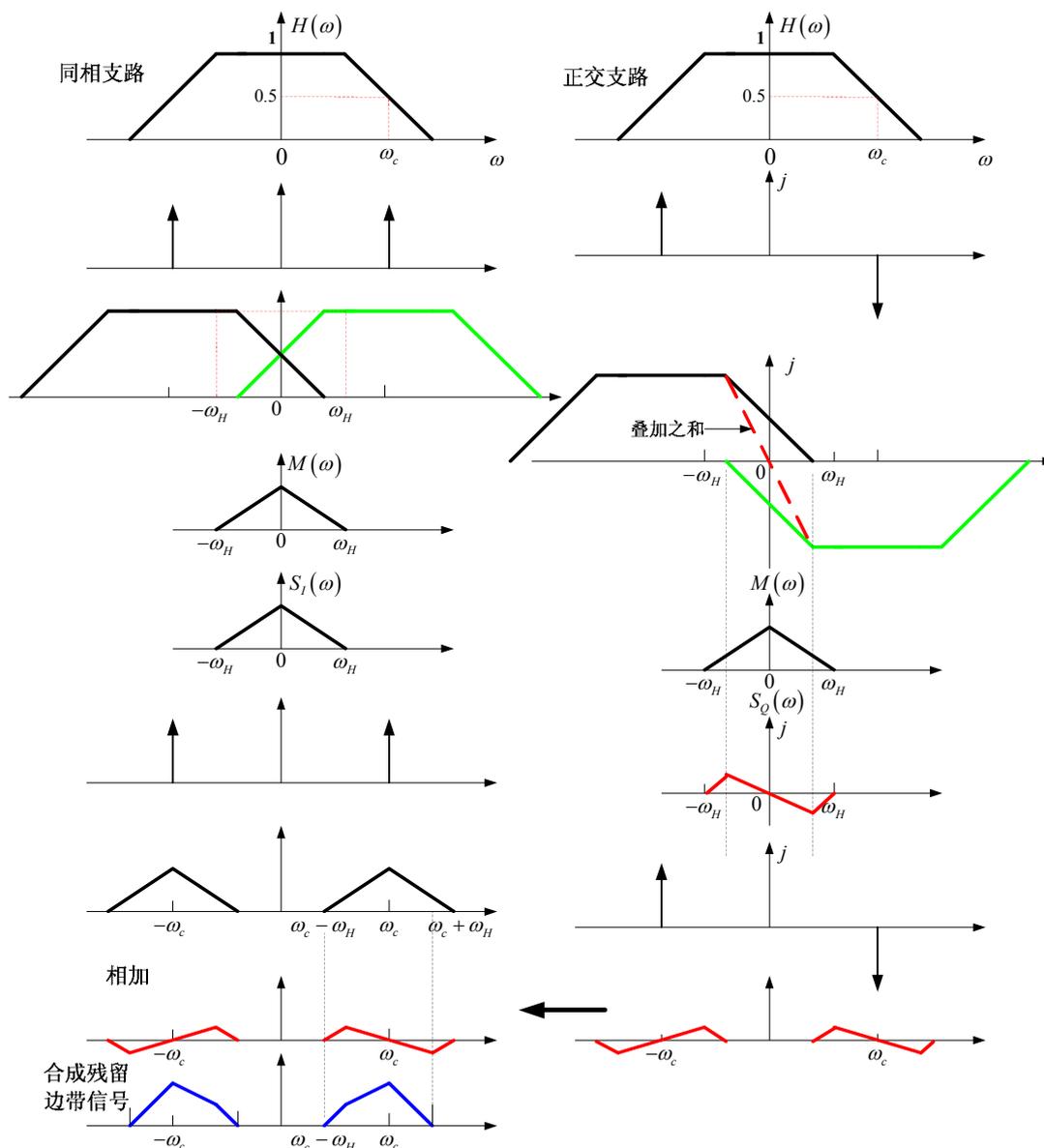
令 $H_I(\omega) = 2$, $|\omega| \leq \omega_H$, 则

$$S_I(\omega) = \frac{1}{2} [H(\omega + \omega_c) + H(\omega - \omega_c)] M(\omega) = M(\omega)$$

因此, 包络检波器输出有用信号即为恢复的调制信号 $m(t)$ 。

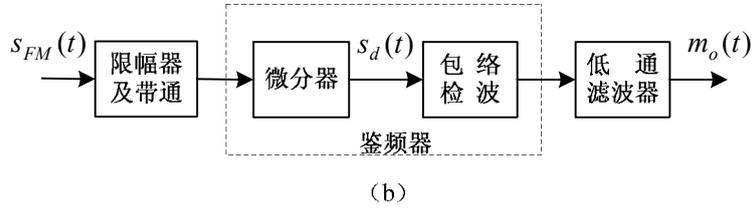
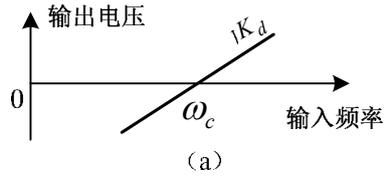
评注: (1) 由于残留边带系统接收端带通滤波器的中心频率不是载频, 而是与残留边带信号的带宽有关, 为其上下截止频率之和的一半, 因此, 该题证明过程如果考虑噪声的话, 化简过程将相当复杂, 由于是大信噪比解调, 为简化运算, 可以在包络中忽略噪声。

(2) 对于线性调制相移法的一般模型而言, 当 $h(t)$ 是残留边带滤波器时 $s_I(t) \cos \omega_c t$ 代表双边带抑制载波信号, $s_Q(t) \sin \omega_c t$ 代表以 ω_c 为奇对称点的残留信号, 一个残留边为正的, 另一个为负的, 二者和双边带抑制载波信号叠加, 即为残留边带信号。如下图所示。



16. 分析：这道题的关键是要明白窄带高斯白噪声的带宽和功率谱密度与其同相分量和正交分量带宽及功率谱密度之间的关系。对于 $n_i(t) = n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t$ ，我们知道，其同相分量和正交分量的平均功率相同，都等于窄带高斯白噪声的平均功率。那么，它们之间的带宽和功率谱密度有什么关系？可以看到，要想从窄带高斯白噪声中得到同相分量很简单，让它通过相干解调器即可，因此对于双边带信号而言，经过相干解调器，带宽减半，这和双边带调制时带宽加倍是对偶的。因此，可以看出，窄带高斯白噪声的同相分量和正交分量的带宽是窄带高斯白噪声带宽的一半。而它们的平均功率又相等，注定同相分量和正交分量的双边带功率谱密度是窄带高斯白噪声的 2 倍，即为 $\frac{n_0}{2} \times 2 = n_0$ 。

其次，要清楚鉴频器的工作原理



鉴频器输出电压与输入信号的瞬时角频偏成正比。

故大信噪比时， $s_{FM}(t) = A \cos[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau]$

假定噪声为 0 的前提下考察鉴频器输入信号：

$$s_d(t) = -A[\omega_c + K_f m(t)] \sin[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau]$$

瞬时频偏为 $K_f m(t)$ ，故鉴频器输出信号

$$m_o(t) = K_d K_f m(t)$$

K_d 为鉴频器灵敏度，单位为 V/rad/s。

假定调制信号为 0 的前提下考察鉴频器输入噪声：

$$\begin{aligned} A \cos \omega_c t + n_i(t) &= A \cos \omega_c t + n_c(t) \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \\ &= [A + n_c(t)] \cos \omega_c t - n_s(t) \sin \omega_c t \end{aligned}$$

$$\psi(t) = \arctan \frac{n_s(t)}{A + n_c(t)}$$

$$\psi(t) = \arctan \frac{n_s(t)}{A + n_c(t)} \approx \arctan \frac{n_s(t)}{A} \approx \frac{n_s(t)}{A}$$

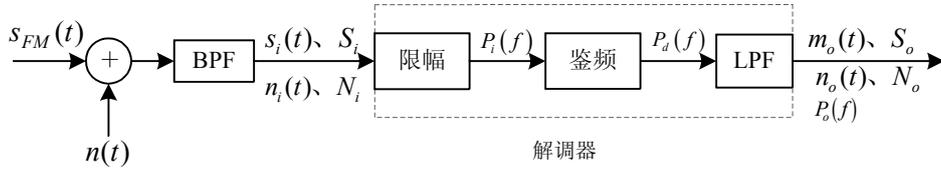
故鉴频器输出噪声

$$n_d(t) = \frac{K_d}{A} \cdot \frac{dn_s(t)}{dt}$$

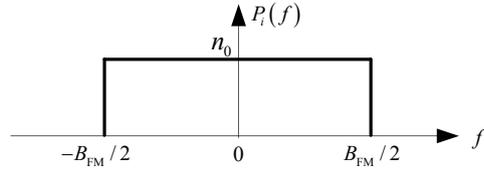
理想微分电路的功率传输函数为

$$|H(f)|^2 = |j2\pi f|^2 = (2\pi)^2 f^2$$

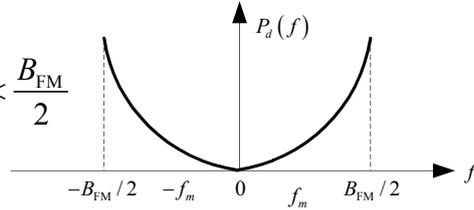
$$P_d(f) = \left(\frac{K_d}{A}\right)^2 |H(f)|^2 P_i(f) = \left(\frac{K_d}{A}\right)^2 (2\pi)^2 f^2 n_0, \quad |f| < \frac{B_{FM}}{2}$$



$$P_i(f) = n_0, \quad |f| \leq \frac{B_{FM}}{2}$$

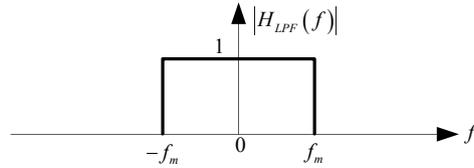


$$P_d(f) = \left(\frac{K_d}{A}\right)^2 |H(f)|^2 P_i(f) = \left(\frac{K_d}{A}\right)^2 (2\pi)^2 f^2 n_0, \quad |f| < \frac{B_{FM}}{2}$$



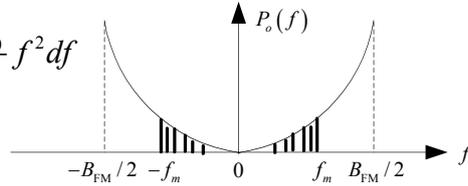
$$|H_{LPF}(f)| = 1, \quad |f| \leq f_m$$

$$P_o(f) = P_d(f) |H_{LPF}(f)|^2$$



$$N_o = \int_{-f_m}^{f_m} P_o(f) df = \int_{-f_m}^{f_m} \frac{4\pi^2 K_d^2 n_0}{A^2} f^2 df$$

$$= \frac{8\pi^2 K_d^2 n_0 f_m^3}{3A^2}$$



解: (1)

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_c - \frac{B_{FM}}{2} \leq |f| \leq f_c + \frac{B_{FM}}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 99.97 \text{ MHz} \leq |f| \leq 100.03 \text{ MHz} \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

$$(2) S_i = \frac{1}{2} A^2 = 5 \text{ KW}$$

$$N_i = n_0 \times B_{FM} = 10^{-3} \times 60 \times 10^3 = 60 \text{ W}$$

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{5 \times 10^3}{60} = 83.3$$

(3)

$$m_0(t) = K_d K_f m(t)$$

$$S_0 = (K_d K_f)^2 \overline{m^2(t)}$$

$$n_0(t) = \frac{K_d}{A} \frac{dn_s(t)}{dt}$$

$$P_o(f) = \left(\frac{K_d}{A}\right)^2 (2\pi f)^2 P_i(f)$$

$$\begin{aligned} N_0 &= \int_{-f_m}^{f_m} P_o(f) df = \int_{-f_m}^{f_m} n_0 \left(\frac{K_d}{A}\right)^2 (2\pi f)^2 df \\ &= \frac{8n_0\pi^2 K_d^2}{3A^2} f_m^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_0}{N_0} &= \frac{(K_d K_f)^2 \overline{m^2(t)}}{\frac{8n_0\pi^2 K_d^2}{3A^2} f_m^3} = \frac{3A^2 K_f^2}{8n_0\pi^2 f_m^3} \overline{m^2(t)} \\ &= \frac{3 \times 100^2 \times (500\pi)^2 \times 5000}{8 \times 10^{-3} \times \pi^2 \times (5000)^3} = 0.375 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$G_{FM} = \frac{S_0/N_0}{S_i/N_i} = \frac{0.375 \times 10^5}{83.3} = 450$$

验证： $G_{FM} = 3(m_f + 1)m_f^2 = 3 \times 6 \times 5^2 = 450$ 和推导的结果是一致的。

$$(4) \text{ AM 包络检波时 } \frac{S_0}{N_0} = \frac{\overline{m^2(t)}}{n_0 B_{AM}} = \frac{5000}{10^{-3} \times 2 \times 5 \times 10^3} = 500$$

$$\frac{(S_0/N_0)_{FM}}{(S_0/N_0)_{AM}} = \frac{37500}{500} = 75 \quad \frac{B_{FM}}{B_{AM}} = \frac{160 \times 10^3}{10 \times 10^3} = 16$$

注意：由于不是单频信号，一般不要通过求 m_f 来计算调制增益，如果要通过 m_f 来计算，则结论应和上述推导过程得到的结果一致。如果经仔细检查不一致，要通过上述的推导来求解，而不是直接用 m_f 计算调制增益。因为这时的 Δf 很可能给错了。这道题书中给出的 $\Delta f = 75 \text{ KHz}$ 有问题，应该为 $\Delta f = 25 \text{ KHz}$ 。

评注：这类题一定要清楚基本原理，不要被表面的数学推导吓到，化整为零，走一步看一步，是很清楚的，不要死记硬背，要从原理出发，理解记忆该系统。结论说明增加很小的带宽，可以换取调制增益的显著增加，在输入有用信号平均功率（即边带功率）和噪声双边带功率

谱密度相等的条件下，FM 广播的音质要比 AM 广播好，这就是同样的节目，西安音乐台比中央人民广播电台动听的原因。因此，虽然电视图像信号用残留边带调制，但伴音信号用的是 FM。

17. 分析：角度调制的题一定要清楚调频信号、调频灵敏度及调频指数定义和卡森公式。

$$s_m(t) = A \cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

物理意义	表达式
瞬时相位	$\omega_c t + \varphi(t)$
瞬时相位偏移	$\varphi(t)$
瞬时角频率	$d[\omega_c t + \varphi(t)] / dt = \omega_c + d\varphi(t) / dt$
瞬时频率	$f_c + d\varphi(t) / 2\pi dt$
瞬时角频偏	$d\varphi(t) / dt$

调频是指瞬时频率偏移随基带信号而线性变化，即

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = K_f m(t)$$

故调频信号的表达式是

$$s_{FM}(t) = A \cos[\omega_c t + K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau]$$

K_f — 调频灵敏度，指单位调制信号幅度引起调频信号的角频率偏移量，由于角频率的单位是 rad/s，故调频灵敏度单位是 rad/s·V，这点非常关键，是解这道题的核心之所在。还要注意调频指数最大频偏的概念，记不住的话，稍加推导即可。

当调制信号是

$$m(t) = A_m \cos \omega_m t = A_m \cos 2\pi f_m t$$

时，调频信号为

$$\begin{aligned} s_{FM}(t) &= A \cos[\omega_c t + K_f A_m \int_{-\infty}^t \cos \omega_m \tau d\tau] \\ &= A \cos[\omega_c t + \frac{K_f A_m}{\omega_m} m_f \sin \omega_m t] \\ &= A \cos[\omega_c t + m_f \sin \omega_m t] \end{aligned}$$

由于 $m_f \sin \omega_m t$ 是瞬时相偏， $|\sin \omega_m t| \leq 1$ ，注定最大相位偏移是

$$m_f = \frac{K_f A_m}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$$

最大角频率偏移

$$\Delta\omega = K_f A_m = K_f |m(t)|_{\max} = 2\pi\Delta f$$

即由调制信号最大幅度（绝对值）引起的角频率偏移。

解：（1）瞬时角频率

$$\omega(t) = 2\pi f(t) = \omega_c + d\varphi(t)/dt = 2\pi \times 10^6 + 2\pi \times 10^4 \cos 2000\pi t$$

瞬时相位

$$\omega_c t + \varphi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\tau) d\tau = 2\pi \times 10^6 t + 10 \sin 2000\pi t$$

调频波表达式

$$s_{FM}(t) = 10 \cos[\omega_c t + \varphi(t)] = 10 \cos(2\pi \times 10^6 t + 10 \sin 2000\pi t)$$

（2）最大频偏

$$\Delta f = |\Delta f(t)|_{\max} = |10^4 \cos 2000\pi t|_{\max} = 10^4 \text{ Hz}$$

调频指数

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{10^4}{10^3} = 10$$

带宽

$$B_{FM} \approx 2(\Delta f + f_m) = 2f_m(m_f + 1) = 22000 \text{ Hz}$$

（3）最大频偏

$$\Delta f = 10^4 \text{ Hz}$$

调频指数

$$m_f = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{10^4}{2 \times 10^3} = 5$$

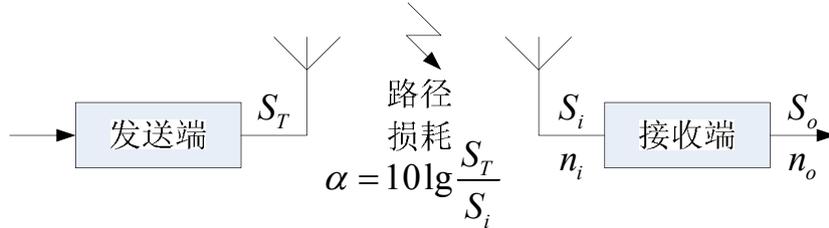
带宽

$$B \approx 2f_m(m_f + 1) = 2 \times 2000 \times (5 + 1) = 24000 \text{ Hz}$$

评注：FM 其实很好理解，就是它的基本定义，这里要注意根据调频灵敏度的定义来解决相关问题，单位调制信号幅度引起调频信号的角频率偏移量，单位是 **rad/s·V**，**往往告诉你的**

是 Hz/s·V。所以，只要调制信号幅度最大值（绝对值）不变，则引起的最大角频率偏移也不变。

18. 分析：该题和 10 题的分析思路是一样的。注意到信道已经不是理想信道了，有了传输损耗，因此，要根据传输损耗计算发射功率与接收功率之间的关系。



$$\left. \frac{S_o}{N_o} \right\} \Rightarrow \frac{S_i}{N_i} \left. \right\} \Rightarrow \frac{S_i}{\alpha} \left. \right\} \Rightarrow \frac{S_T}{\alpha} \left. \right\} \Rightarrow \frac{S_i}{N_i = n_o B} \left. \right\} \Rightarrow \frac{S_i}{N_i} \left. \right\} \Rightarrow \frac{S_o}{N_o}$$

调制增益 G

注意到，所谓的 100%调制是指 $s_{AM}(t) = [A + m(t)] \cos \omega_c t$ 中， $A = |m(t)|_{\max}$ ， $m(t)$ 为单频余弦信号时， $G_{AM} = 2/3$ 。

解：

$$\left(\frac{S_o}{N_o} \right)_{dB} = 10 \lg \frac{S_o}{N_o} = 40 \quad \frac{S_o}{N_o} = 10^4$$

$$\left(\frac{S_T}{S_i} \right)_{dB} = 10 \lg \frac{S_T}{S_i} = 60 \quad \frac{S_T}{S_i} = 10^6$$

(1) 对于 AM 系统

带通滤波器带宽

$$B_{BPF} = 2f_m = 16 \text{ MHz}$$

100%调制时的调制增益

$$G_{AM} = \frac{2}{3}$$

接收机输入信噪比

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{3}{2} \times \frac{S_o}{N_o} = 1.5 \times 10^4$$

接收机输入噪声平均功率

$$N_i = n_o B_{BPF} = 5 \times 10^{-15} \times 2 \times f_m = 5 \times 10^{-15} \times 2 \times 8 \times 10^6 = 8 \times 10^{-8} \text{ (W)}$$

接收机输入信号平均功率

$$S_i = 1.5 \times 10^4 N_i = 1.5 \times 10^4 \times 8 \times 10^{-8} = 1.2 \times 10^{-3} \text{ (W)}$$

发射功率

$$S_T = 10^6 S_i = 10^6 \times 1.2 \times 10^{-3} = 1200 \text{ (W)}$$

(2) 对于 FM 系统

带通滤波器带宽

$$B_{BPF} = 2(m_f + 1)f_m = 2(5 + 1) \times 8 \times 10^6 = 96 \text{ (MHz)}$$

调制增益

$$G_{FM} = 3(m_f + 1)m_f^2 = 3 \times (5 + 1) \times 5^2 = 450$$

接收机输入信噪比

$$S_i/N_i = \frac{S_o/N_o}{450} = \frac{10^4}{450}$$

接收机输入噪声平均功率

$$N_i = n_0 B_{BPF} = 5 \times 10^{-15} \times 96 \times 10^6 = 4.8 \times 10^{-7} \text{ (W)}$$

接收机输入信号平均功率

$$S_i = \frac{10^4}{450} N_i = \frac{10^4}{450} \times 4.8 \times 10^{-7} = 1.067 \times 10^{-5} \text{ (W)}$$

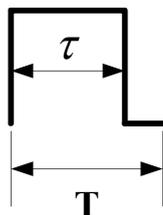
发射功率

$$S_T = 10^6 S_i = 10^6 \times 1.067 \times 10^{-5} = 10.67 \text{ (W)}$$

评注：在输出信噪比，即抗噪声性能相同的前提下，经过相同的信道损耗，FM 系统的发射功率比 AM 系统要小得多，这在功率受限的条件下，提供了一种模拟通信系统的解决方案。

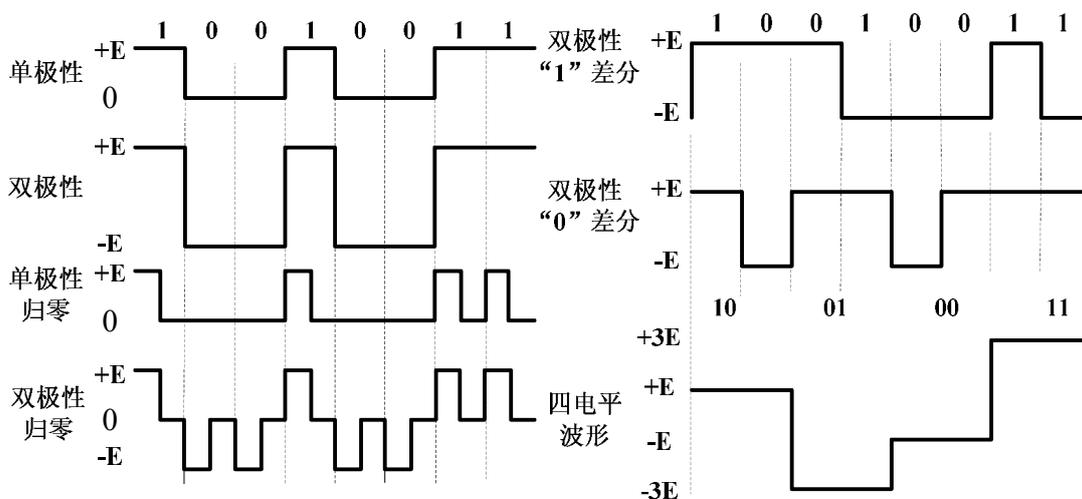
第六章 数字基带传输系统

1. 分析：该题考核通信原理中常用的几类信号。在这里，注意占空比的概念，是指一个码元宽度内有电脉冲所占的比例，而数字基带信号的第一零点带宽是由占空比决定的，占空比



越大，有电脉冲越宽，其倒数即第一零点带宽越小。需要注意的是差分码有两种“1”差分 and “0”差分，都是用相邻码元电平的变化来表示数字信息。四进制电平的安排是按格雷码的顺序安排的，即相邻的两码元之间只有 1 位不同，即 11、10、00、01，电平安排的顺序也是这样从高到低的，+3E、+E、-E 和 -3E。

解：



评注：差分码由于使用“相对”的概念，利用相邻码元电平的变化来表示数字信息，使得在数字调制中得到了广泛的应用。在第 7 章的 2DPSK 调制中，克服了 2PSK 的相位模糊现象。

2. 分析：要证明一个数字基带信号中无离散谱，只需证明其离散功率谱密度为 0 即可。

证：由

$$P = \frac{1}{1 - \frac{g_1(t)}{g_2(t)}} = k$$

得到

$$1 - P = 1 - k$$

$$\frac{k-1}{k} = \frac{g_1(t)}{g_2(t)}$$

即

$$G_1(f) = \frac{k-1}{k} G_2(f)$$

代入离散功率谱密度公式

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 \left| P G_1(mf_s) + (1-P) G_2(mf_s) \right|^2 \delta(f - mf_s)$$

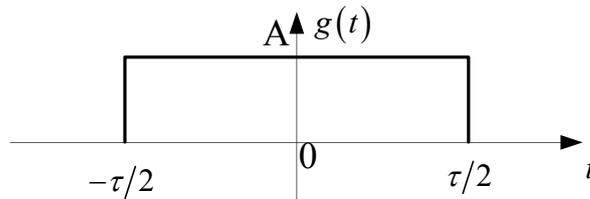
得到

$$P G_1(mf_s) + (1-P) G_2(mf_s) = k \times \frac{k-1}{k} G_2(mf_s) + (1-k) G_2(mf_s) = 0$$

因此，该脉冲序列无离散谱。

评注：一般的功率谱密度中，“1”码和“0”码出现的概率和它们各自的波形没什么关系，因此，只有在等概和双极性的条件下，无离散谱。而该题通过概率将表示“1”和“0”码的波形联系起来，因此，可以得到它们傅里叶变换，即频谱密度之间的关系，这是证明的关键。

3. 分析：求功率谱密度之类的题没什么捷径，带公式即可。但是通原中的码元往往使用矩形脉冲或三角脉冲表示的，而这些脉冲的傅里叶变换很好求解。



$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A\tau \cdot \text{面积}}{\text{面积}} \left(\frac{2\pi f \cdot \frac{\tau}{2}}{\text{注意 门宽的一半}} \right) = G(f)$$

解：(1)

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 \left| p G_1(mf_s) + (1-p) G_2(mf_s) \right|^2 \delta(f - mf_s) + f_s p(1-p) \left| G_1(f) - G_2(f) \right|^2$$

将 $G_1(f) = -G_2(f) = G(f)$ 带入可得

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 \left| P G(mf_s) - (1-P) G(mf_s) \right|^2 \delta(f - mf_s) + f_s P(1-P) \left| G(f) + G(f) \right|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 (2P-1) |G(mf_s)|^2 \delta(f - mf_s) + 4f_s P(1-P) |G(f)|^2$$

(2)

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt = T_s \cdot sa(\pi f T_s)$$

代入

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 (2P-1) |G(mf_s)|^2 \delta(f - mf_s) + 4f_s P(1-P) |G(f)|^2$$

得到

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2P-1) |sa(\pi m)|^2 \delta(f - mf_s) + 4T_s P(1-P) |sa(\pi f T_s)|^2$$

当 $m=1$ 时, $sa(\pi) = 0$, 故不存在离散分量 $f_s = 1/T_s$ 。

(3)

$$G(f) = T_s sa(\pi f T_s / 2) / 2$$

代入

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 (2P-1) |G(mf_s)|^2 \delta(f - mf_s) + f_s P(1-P) |G(f)|^2$$

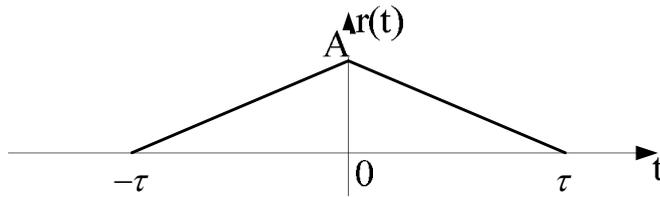
得到

$$P_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} (2P-1) |sa(\pi m / 2)|^2 \delta(f - mf_s) + 4T_s P(1-P) |sa(\pi f T_s)|^2$$

当 $m=1$ 时, $sa(\pi/2) \neq 0$, 故存在离散分量 $f_s = 1/T_s$ 。

评注: 不要被功率谱密度复杂的表达式吓倒, 它的核心问题是求 $G_1(f)$ 和 $G_2(f)$ 。

4. 分析: 于第 3 题一样, 求功率谱密度之类的题没什么捷径, 带公式即可。但是通原中的码元往往使用矩形脉冲或三角脉冲表示的, 而这些脉冲的傅里叶变换很好求解。



$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A\tau \cdot sa^2}{\text{面积}} \left(\frac{2\pi f \cdot \frac{2\tau}{4}}{\text{注意 门宽的四分之一}} \right) = A\tau \cdot sa^2(\pi f \tau) = R(f)$$

解：(1)

$$G_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{AT_s}{2} sa^2(\pi f T_s / 2)$$

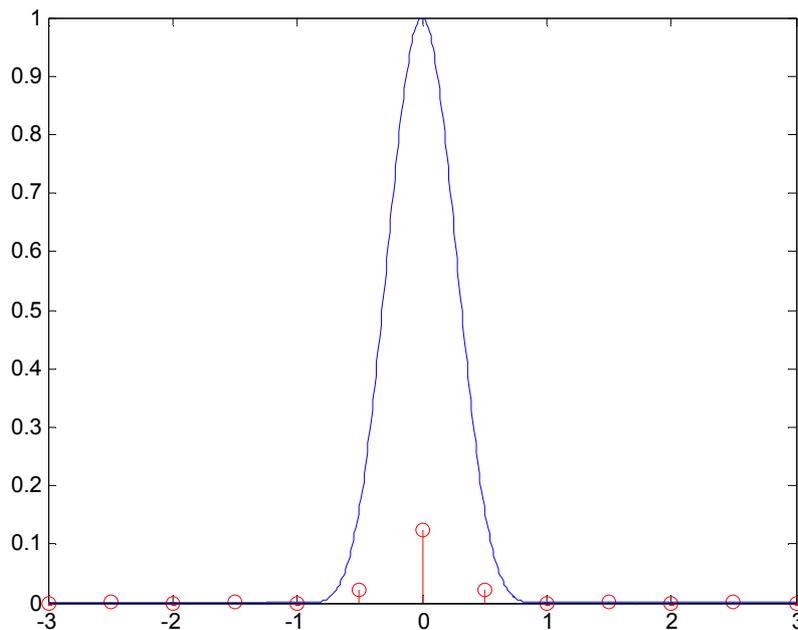
$$G_2(f) = 0$$

$$P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$$

代入功率谱密度公式

$$\begin{aligned} P_s(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s^2 \left| pG_1(mf_s) + (1-p)G_2(mf_s) \right|^2 \delta(f - mf_s) + f_s p(1-p) \left| G_1(f) - G_2(f) \right|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{16} sa^4(\pi m/2) \delta(f - mf_s) + \frac{A^2 T_s}{2} sa^4(\pi f T_s / 2) \end{aligned}$$

当 $A = \sqrt{2}$, $T_s = 1$ 时, 功率谱密度图为



(2) 当 $m=1$ 时, $sa^4(\pi/2) \neq 0$, 故存在离散分量 $f_s = 1/T_s$, 可以从该基带信号中提取位定时分量。

由于得到的是双边带功率谱密度, 将 $m = \pm 1$ 代入即得该分量的功率

$$P = \frac{A^2}{16} sa^4(\pi/2) + \frac{A^2}{16} sa^4(-\pi/2) = \frac{A^2}{8} \times [2/\pi]^4 = \frac{2A^2}{\pi^4}$$

评注: 由于所求是双边带功率谱密度, 计算离散分量的平均功率时, 正负都要算。离散谱是由稳态波来的, 稳态波是周期为码元宽度的周期信号, 故其傅里叶系数即频谱的平方, 即为对应离散谱的功率。

7. 分析: AMI、HDB₃ 主要根据其规则进行:

AMI: 传号(“1”)极性交替, 空号(“0”)不变, 即“1”变“0”不变, 正负交替。

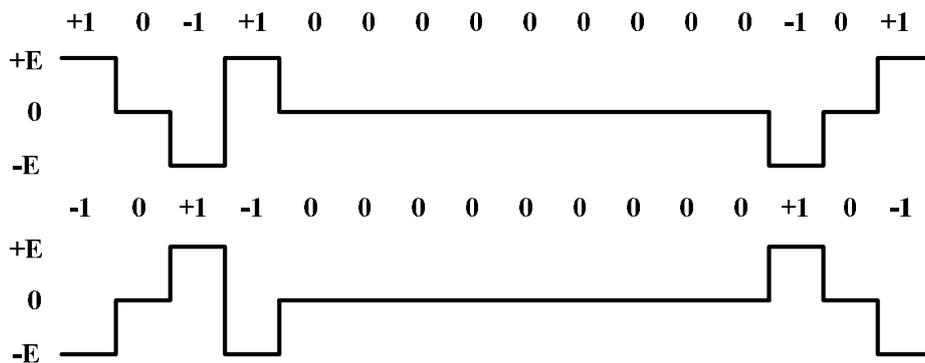
HDB₃: (1) 当连“0”个数不超过 3 时, 仍按 AMI 码的规则编, 即传号极性交替; □

(2) 当连“0”个数超过 3 时, 4 个连“0”为一组, 当该组四连“0”与其前一组四连“0”之间有奇数个传号码, 用 000V 取代该组四连“0”。V 极性与其前非零码极性一致, V 本身满足极性交替; □

(3) 当该组四连“0”与其前一组四连“0”之间有偶数个(包括 0 个“1”)传号码, 用 B00V 取代该组四连“0”。B 极性与其前一非零码极性相反, V 极性与 B 极性一致, V 本身满足极性交替;

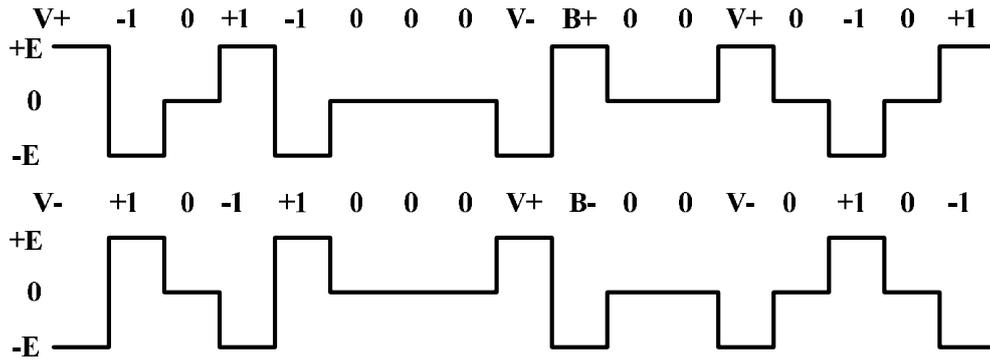
解:

AMI: +10-1+100000000-10+1 或 -10+1-100000000+10-1



HDB₃: V+ -1 0 +1 -10 0 0 V- B+ 0 0 V+ 0-1 0 +1 或

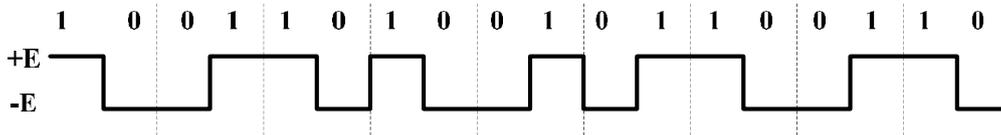
V- +1 0 -1 +10 0 0 V+ 0 B- 0 0 V- 0+1 0 -1



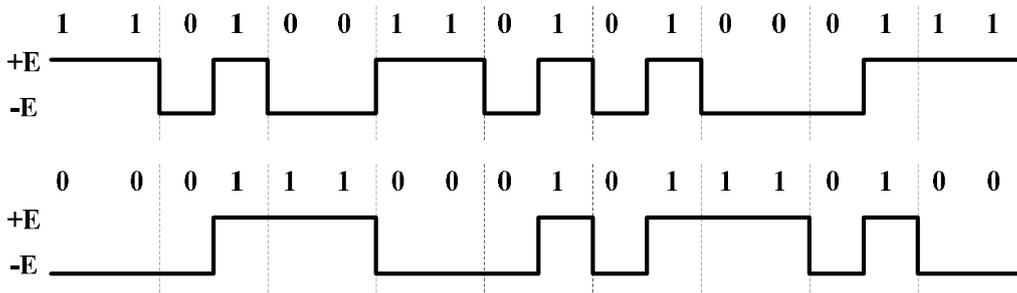
8. 分析：双相码编码规则：1 → 10；0 → 01。

CMI：传号反转码，编码规则：1 → 交替变成 11, 00；0 → 01。

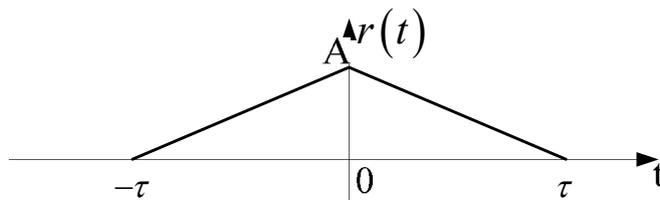
解：双相码：100110100101100110



CMI：110100110101000111 或 000111000101110100



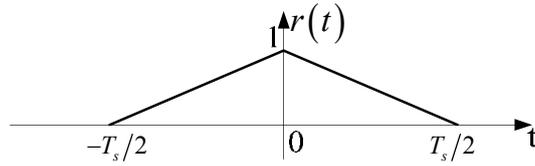
9. 分析：对于基带传输系统而言，我们考察的是由发送滤波器、信道、接收滤波器所构成的系统总得传输特性 $H(\omega)$ ，因此，当系统输入为一冲激函数时，输出即系统的冲激响应 $h(t)$ 。本题给出的冲激响应，是移位后的三角函数，因此，利用三角函数的傅里叶变换和时移公式，即可求出总传输特性 $H(\omega)$ 。



$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{A\tau \cdot \text{面积}}{\text{面积}} \left(\frac{2\pi f \cdot \frac{2\tau}{4}}{\text{注意 门宽的四分之一}} \right) = A\tau \cdot \text{sa}^2(\pi f \tau) = R(f)$$

$$r(t \pm t_d) \Leftrightarrow R(\omega) e^{\pm j\omega t_d}$$

解：(1) $h(t)$ 可以看成三角形 $r(t)$ 时移 $T_s/2$ 的结果。



$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{T_s}{2} \cdot \text{sa}^2(\pi f T_s / 2) = R(f)$$

$$h(t) = r\left(t - \frac{T_s}{2}\right)$$

故

$$H(\omega) = R(\omega) e^{-j\pi f T_s} = \frac{T_s}{2} \cdot \text{sa}^2(\pi f T_s / 2) e^{-j\pi f T_s}$$

(2) 系统总得传输特性 $H(\omega)$ 是由发送滤波器 $G_T(\omega)$ 、信道 $C(\omega)$ 、接收滤波器 $G_R(\omega)$ 所构成的。

$$H(\omega) = G_T(\omega) C(\omega) G_R(\omega)$$

将 $C(\omega) = 1$, $G_T(\omega) = G_R(\omega)$ 代入, 得到

$$G_T(\omega) = G_R(\omega) = \sqrt{H(\omega)} = \sqrt{\frac{T_s}{2}} |\text{sa}(\pi f T_s / 2)| e^{-j\pi f T_s / 2}$$

10. 分析: 判断数字基带系统无码间干扰需要依据下面准则。

假定待传数字基带信号传码率为 R_B 。

i 利用奈奎斯特第一准则移位判断

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= \sum_i H(\omega + 2i\pi R_B) \\ &= \sum_i H(\omega + i \times 2 \times \pi R_B) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq \pi R_B = \omega_N \end{aligned}$$

或根据 $\omega = 2\pi f$ 得到

$$\begin{aligned} H_{eq}(f) &= \sum_i H(f + iR_B) \\ &= \sum_i H\left(f + i \times 2 \times \frac{R_B}{2}\right) = \text{常数}, \quad |f| \leq \frac{R_B}{2} = f_N \end{aligned}$$

f_N 为等效奈奎斯特带宽, $\omega_N = 2\pi f_N$

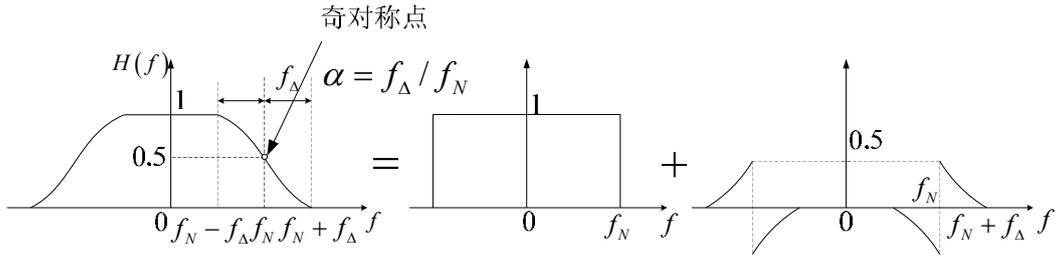
或利用下述方法:

已知理想低通传输特性时，设其带宽为 f_N ，则可求出其满足无码间干扰时所能传输的

最大传码率 $R_{B_{\max}} = 2f_N$ ，结论如下：

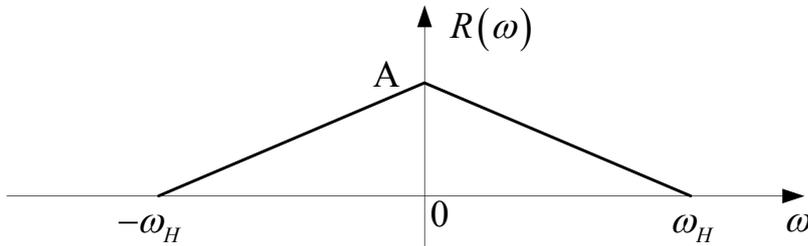
$$\frac{R_B}{R_{B_{\max}}} = \frac{1}{N}, \begin{cases} N=1,2,3,\dots, \text{可实现无码间干扰传输} \\ N>1 \text{但不为整数, 可传, 但有码间干扰} \\ 0<N<1, \text{不可传} \end{cases}$$

ii 当信道传输特性为**非理想**时，首先找到其斜边的中点，该中点横坐标对应该信道的等效带



宽 $B_{eq} = f_N$ ，即把该非理想的传输特性等效成为一个带宽为 f_N 的理想传输特性，这时，判断其有无码间干扰同 i。

利用



$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \omega_H = 2\pi B_H$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{AW_H}_{\text{面积}} \cdot sa^2 \left(\underbrace{t}_{\text{注意}} \cdot \underbrace{\frac{2W_H}{4}}_{\text{门宽的四分之一}} \right) = AB_H \cdot sa^2(\pi B_H t) = R(f)$$

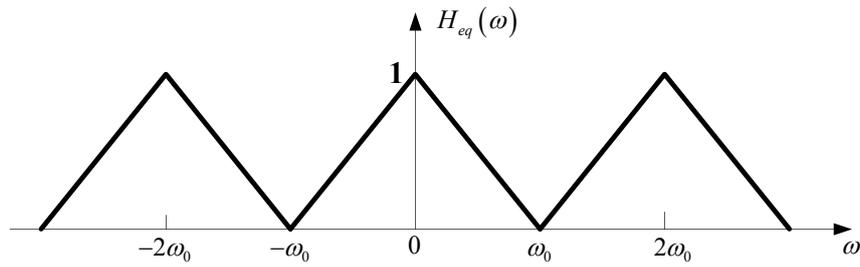
解：(1) 系统接收滤波器输出的冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_0}{2\pi} sa^2(\omega_0 t/2)$$

(2) 当 $R_B = \omega_0/\pi$ 时，所需的奈奎斯特带宽 $f_N = R_B/2 = \omega_0/2\pi$ ，故只需将 $H(\omega)$ 以

$2\pi R_B = 2\omega_0$ 为间隔进行平移，在 $(-\omega_0, \omega_0)$ 上等效为一个常数即可。即

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + i2\omega_0) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq \omega_0$$



经验证

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + i2\omega_0) \neq \text{常数}, \quad |\omega| \leq \omega_0$$

故当传码率 $R_B = \omega_0/\pi$ ，该系统不能实现无码间干扰传输。

方法 2:

所给传输特性的等效奈奎斯特带宽 $f_N = \omega_0/4\pi$ ，因此，可实现无码间串扰的最高传码率

$$R_{B\max} = 2f_N = \omega_0/2\pi$$

$$R_B > R_{B\max}$$

所以，当传码率 $R_B = \omega_0/\pi$ ，该系统不能实现无码间干扰传输。

评注：用奈奎斯特第一准则判断有无码间干扰时，一定要注意判决的依据是待传输的码元速率，该速率决定的最小奈奎斯特带宽是所给传输特性的等效带宽，因此，要在该等效带宽上以传码率进行平移，如果给出的传输特性是 $H(\omega)$ ，则等效带宽和传码率等要乘以 2π 。

11. 分析：该题的思路和第 10 题一样，判断数字基带系统无码间干扰需要依据下面准则。

假定待传数字基带信号传码率为 R_B 。

i 利用奈奎斯特第一准则移位判断

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= \sum_i H(\omega + 2i\pi R_B) \\ &= \sum_i H(\omega + i \times 2 \times \pi R_B) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq \pi R_B = \omega_N \end{aligned}$$

或根据 $\omega = 2\pi f$ 得到

$$\begin{aligned} H_{eq}(f) &= \sum_i H(f + iR_B) \\ &= \sum_i H(f + i \times 2 \times \frac{R_B}{2}) = \text{常数}, \quad |f| \leq \frac{R_B}{2} = f_N \end{aligned}$$

f_N 为等效奈奎斯特带宽， $\omega_N = 2\pi f_N$

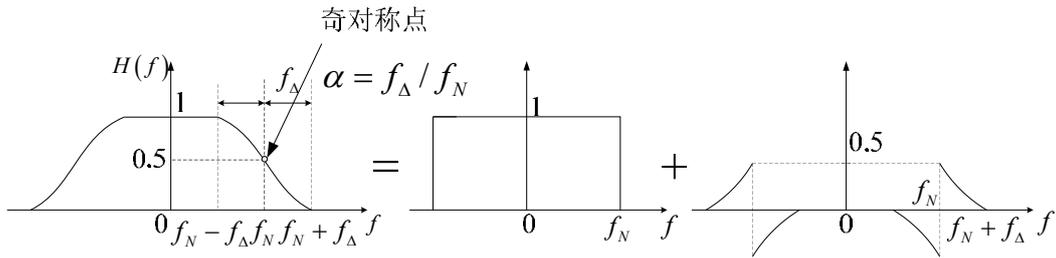
或利用下述方法:

已知理想低通传输特性时, 设其带宽为 f_N , 则可求出其满足无码间干扰时所能传输的

最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N$, 结论如下:

$$\frac{R_B}{R_{B\max}} = \frac{1}{N}, \begin{cases} N=1,2,3,\dots, \text{可实现无码间干扰传输} \\ N>1 \text{但不为整数, 可传, 但有码间干扰} \\ 0 < N < 1, \text{不可传} \end{cases}$$

ii 当信道传输特性为**非理想**时, 首先找到其斜边的中点, 该中点横坐标对应该信道的等效带



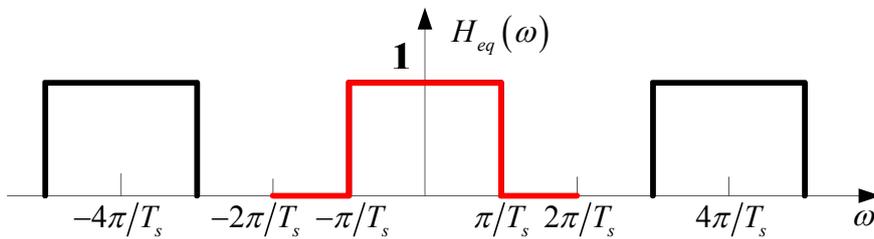
宽 $B_{eq} = f_N$, 即把该非理想的传输特性等效成为一个带宽为 f_N 的理想传输特性, 这时, 判断其有无码间干扰同 i。

解: 方法 1

当 $R_B = 2/T_s$ 时, 所需的奈奎斯特带宽 $f_N = R_B/2 = 1/T_s$, 故只需将 $H(\omega)$ 以 $2\pi R_B = 4\pi/T_s$ 为间隔进行平移, 在 $(-2\pi f_N, 2\pi f_N)$, 即 $(-2\pi/T_s, 2\pi/T_s)$ 上等效为一个常数即可。即

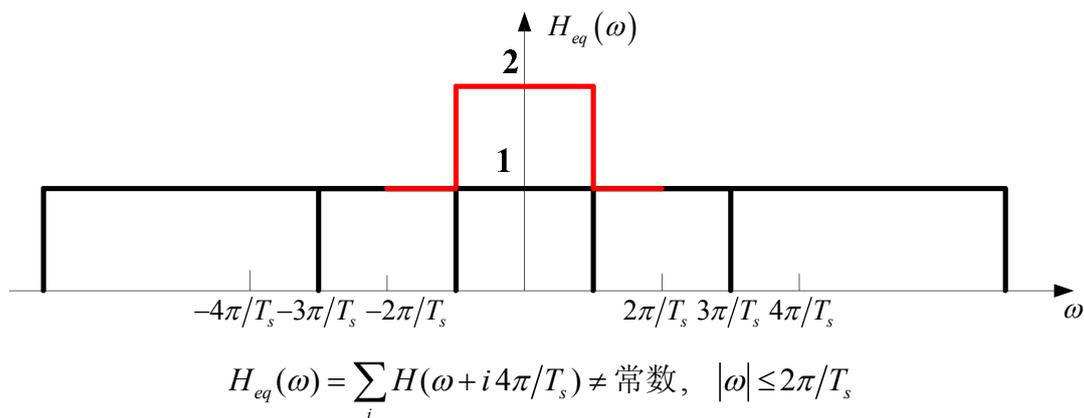
$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + i4\pi/T_s) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq 2\pi/T_s$$

(a)

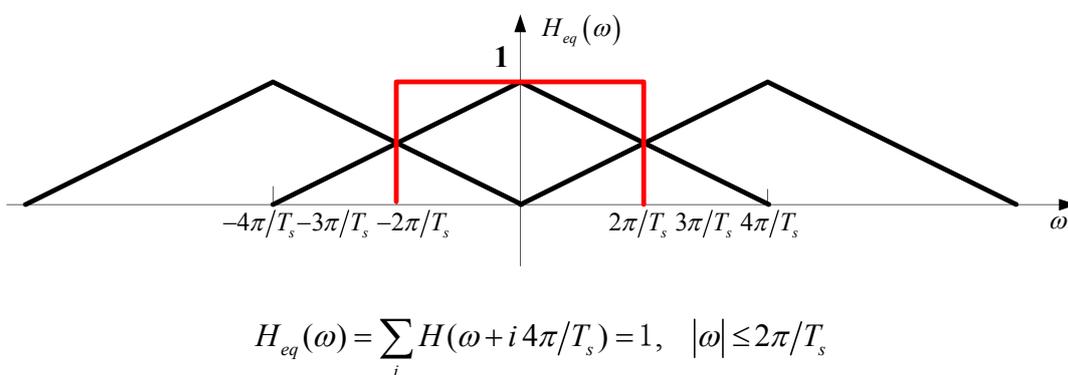


$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + i4\pi/T_s) \neq \text{常数}, \quad |\omega| \leq 2\pi/T_s$$

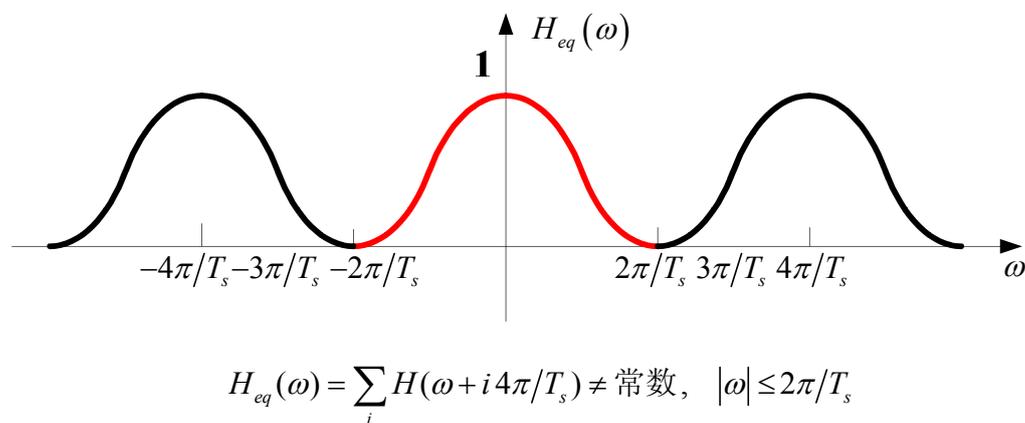
(b)



(c)



(d)



因此，只有 (c) 能满足无码间串扰条件，能实现无码间串扰传输，(a)、(b) 和 (d) 不能实现无码间串扰传输。

方法 2:

(a) 是理想传输特性， $f_N = \frac{1}{2T_s}$ ，故无码间干扰时的最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N = \frac{1}{T_s}$ ，由于

$R_B = \frac{2}{T_s} > R_{B\max}$ ，所以不能实现无码间串扰传输。

(b) 是理想传输特性， $f_N = \frac{3}{2T_s}$ ，故无码间干扰的最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N = \frac{3}{T_s}$ ，由于

$\frac{R_B}{R_{B\max}} = \frac{2/T_s}{3/T_s} = \frac{2}{3}$ ，不是正整数分之一的关系，所以不能实现无码间串扰传输。

(c) 是非理想传输特性，其奈奎斯特等效带宽 $f_N = \frac{1}{T_s}$ ，故无码间干扰的最大传码率

$R_{B\max} = 2f_N = \frac{2}{T_s}$ ，由于 $\frac{R_B}{R_{B\max}} = \frac{2/T_s}{2/T_s} = 1$ ，可以实现无码间串扰传输。

(d) 是非理想传输特性，其奈奎斯特等效带宽 $f_N = \frac{1}{2T_s}$ ，故无码间干扰的最大传码率

$R_{B\max} = 2f_N = \frac{1}{T_s}$ ，由于 $R_B = \frac{2}{T_s} > R_{B\max}$ ，不能实现无码间串扰传输。

评注：与第 10 题一样。用奈奎斯特第一准则判断有无码间干扰时，一定要注意判决的依据是待传输的码元速率，该速率决定的最小奈奎斯特带宽是所给传输特性的等效带宽，因此，要在该等效带宽上以传码率进行平移，如果给出的传输特性是 $H(\omega)$ ，则等效带宽和传码率等要乘以 2π 。

12. 分析：该题的思路和第 11 题一样，判断数字基带系统无码间干扰需要依据下面准则。

假定待传数字基带信号传码率为 R_B 。

i 利用奈奎斯特第一准则移位判断

$$\begin{aligned} H_{eq}(\omega) &= \sum_i H(\omega + 2i\pi R_B) \\ &= \sum_i H(\omega + i \times 2 \times \pi R_B) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq \pi R_B = \omega_N \end{aligned}$$

或根据 $\omega = 2\pi f$ 得到

$$\begin{aligned} H_{eq}(f) &= \sum_i H(f + iR_B) \\ &= \sum_i H(f + i \times 2 \times \frac{R_B}{2}) = \text{常数}, \quad |f| \leq \frac{R_B}{2} = f_N \end{aligned}$$

f_N 为等效奈奎斯特带宽， $\omega_N = 2\pi f_N$

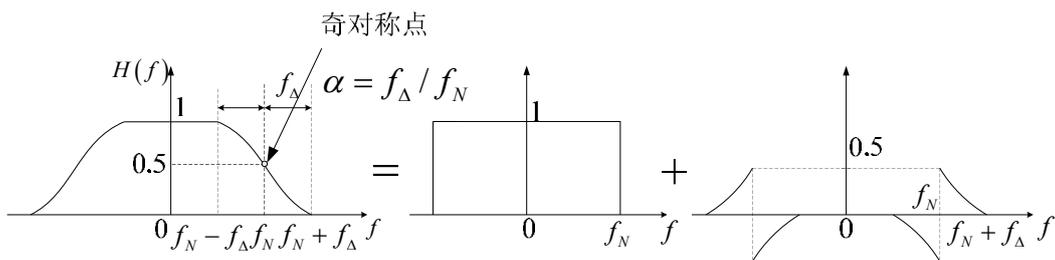
或利用下述方法：

已知理想低通传输特性时，设其带宽为 f_N ，则可求出其满足无码间干扰时所能传输的

最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N$ ，结论如下：

$$\frac{R_B}{R_{B\max}} = \frac{1}{N}, \begin{cases} N=1,2,3,\dots, \text{可实现无码间干扰传输} \\ N>1 \text{但不为整数, 可传, 但有码间干扰} \\ 0 < N < 1, \text{不可传} \end{cases}$$

ii 当信道传输特性为**非理想**时，首先找到其斜边的中点，该中点横坐标对应该信道的等效带



宽 $B_{eq} = f_N$ ，即把该非理想的传输特性等效成为一个带宽为 f_N 的理想传输特性，这时，判断其有无码间干扰同 i。

如果没有告诉传码率，那就要看所给传输特性的滚降边即斜边是否具有奇对称性，只要具有奇对称性，就能以奇对称点横坐标为等效奈奎斯特带宽，等效出一个理想低通特性，就可以实现无码间干扰传输。

解：（1）由于所给特性的滚降边关于 ω_0 呈奇对称，故以 $f_N = \omega_0/2\pi$ 为等效奈奎斯特带宽可以在 $(-\omega_0, \omega_0)$ 等效成理想低通滤波器，故能实现无码间干扰传输。

（2）可实现无码间干扰传输的最大传码率

$$R_{B\max} = 2f_N = \omega_0/\pi$$

系统带宽

$$B = (1 + \alpha)f_N = \frac{(1 + \alpha)\omega_0}{2\pi}$$

最高频带利用率

$$\eta = \frac{R_{B\max}}{B} = \frac{2f_N}{(1 + \alpha)f_N} = \frac{2}{1 + \alpha} \quad (\text{波特/赫兹})$$

13. 分析：选择数字基带系统需要依据下面准则。

（1）假定待传数字基带信号传码率为 R_B 。

i 利用奈奎斯特第一准则移位判断

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + 2i\pi R_B)$$

$$= \sum_i H(\omega + i \times 2 \times \pi R_B) = \text{常数}, \quad |\omega| \leq \pi R_B = \omega_N$$

或根据 $\omega = 2\pi f$ 得到

$$H_{eq}(f) = \sum_i H(f + iR_B)$$

$$= \sum_i H(f + i \times 2 \times \frac{R_B}{2}) = \text{常数}, \quad |f| \leq \frac{R_B}{2} = f_N$$

f_N 为等效奈奎斯特带宽, $\omega_N = 2\pi f_N$

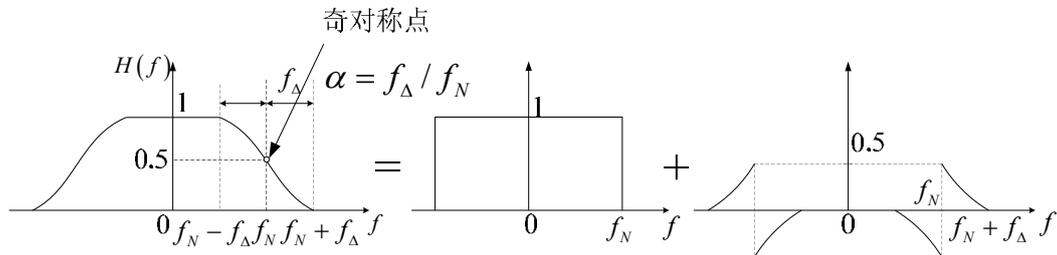
或利用下述方法:

已知理想低通传输特性时, 设其带宽为 f_N , 则可求出其满足无码间干扰时所能传输的

最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N$, 结论如下:

$$\frac{R_B}{R_{B\max}} = \frac{1}{N}, \quad \begin{cases} N = 1, 2, 3, \dots, \text{可实现无码间干扰传输} \\ N > 1 \text{但不为整数, 可传, 但有码间干扰} \\ 0 < N < 1, \text{不可传} \end{cases}$$

ii 当信道传输特性为**非理想**时, 首先找到其斜边的中点, 该中点横坐标对应该信道的等效带



宽 $B_{eq} = f_N$, 即把该非理想的传输特性等效成为一个带宽为 f_N 的理想传输特性, 这时, 判

断其有无码间干扰同 i。

(2) 如果要比较几种传输特性, 并选出其中最好的, 需要用下列方法。

1. 根据无码间串扰条件(1)判断能否满足码间串扰, 在满足的条件下, 转2.
2. 比较实际频带利用率 $\eta = \frac{\text{题中所给基带信号传输速率}}{\text{信道实际带宽}}$, 选 η 高的.
3. 在 η 相同的条件下, 选信道冲激响应拖尾收敛快的

{	矩形: $1/t$ 衰减
	三角形/梯形:
	$1/t^2$ 衰减
	升余弦: $1/t^3$ 衰减
}	
- 有利于减小码间干扰和定时误差的影响
4. 比较易实现程度: 由3选尾巴收敛快的, 越快越容易实现, 理想传输特性是物理上不能实现的.

解: (1) 从无码间干扰的角度选择

(a) 图的等效奈奎斯特带宽是 $f_N = 2000\pi/2\pi = 1000$ Hz, 其所能实现无码间干扰的最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N = 2000$ 波特, 由于 $R_B/R_{B\max} = 1000/2000 = 1/2$, 因此, 可以实现无码间干扰传输。

(b) 图是理想传输特性, $f_N = 2000\pi/2\pi = 1000$ Hz, 其所能实现无码间干扰的最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N = 2000$ 波特, 由于 $R_B/R_{B\max} = 1000/2000 = 1/2$, 因此, 可以实现无码间干扰传输。

(c) 图的等效奈奎斯特带宽是 $f_N = 1000\pi/2\pi = 500$ Hz, 其所能实现无码间干扰的最大传码率 $R_{B\max} = 2f_N = 1000$ 波特, 由于 $R_B/R_{B\max} = 1000/1000 = 1$, 因此, 可以实现无码间干扰传输。

因此, 以上三种传输特性都能实现无码间干扰传输, 都在可选范围之内。

(2) 从实际频带利用率的角度选择

(a) 图的实际频带利用率 $\eta = R_B/B = 1000/2000 = \frac{1}{2}$ 波特/赫兹。

(b) 图的实际频带利用率 $\eta = R_B/B = 1000/1000 = 1$ 波特/赫兹。

(c) 图的实际频带利用率 $\eta = R_B/B = 1000/1000 = 1$ 波特/赫兹。

因此, 从实际频带利用率看, 应选 (b) 和 (c)。

(3) 从冲激响应拖尾衰减速度的角度选择

(a) 图是三角形传输函数, 其拖尾以 $1/t^2$ 衰减。

(b) 图理想低通传输函数, 其拖尾以 $1/t$ 衰减。

(c) 图是三角形传输函数，其拖尾以 $1/t^2$ 衰减。

因此，从冲激响应拖尾衰减速度看 (a) 和 (c) 衰减的最快，对定时灵敏度要求较低，应选

(a) 和 (c)。

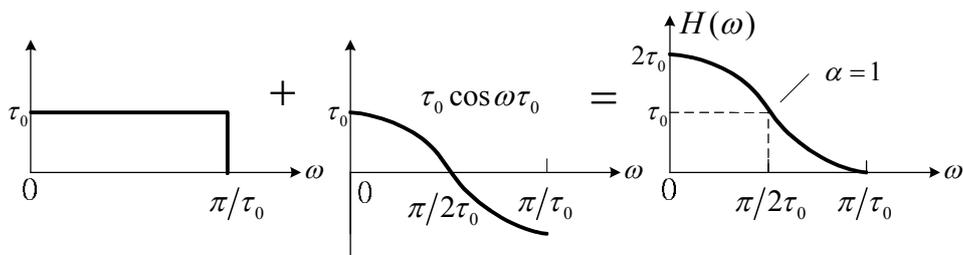
(4) 从易实现程度的角度选择

(a) 和 (c) 具有滚降系数，物理上容易实现。

(b) 图是理想低通传输函数，物理上不能实现。

所以，从易实现的角度应选 (a) 和 (c)，由于 (c) 的频带利用率高于 (a)，故 (c) 是最佳传输特性。

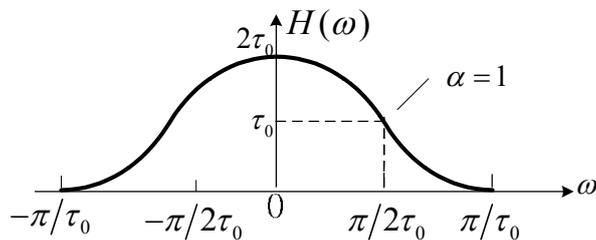
14. 分析：与 11、12 和 13 是一类题，分析思路一样。但要注意这里给出的是传输特性的表达式，不是图形，而最简单直观的方法是看图。经观察可知，所给传输特性可分解为一个矩形和余弦函数的叠加。本题可按下图分解合成。



立马可看出其等效奈奎斯特带宽 $f_N = 1/4\tau_0$ ，故无码间干扰传输的最大传码率为

$$R_{B\max} = 2f_N = 1/2\tau_0$$

解：该传输特性如图所示



其等效奈奎斯特带宽 $f_N = 1/4\tau_0$ ，故无码间干扰传输的最大传码率为 $R_{B\max} = 2f_N = 1/2\tau_0$ 。

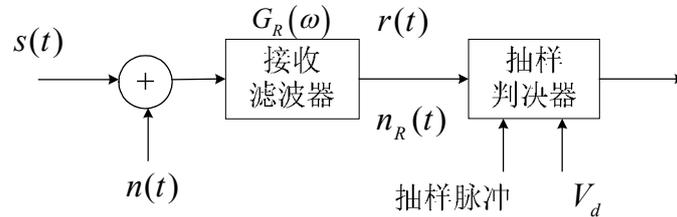
相应码元间隔 $T_0 = 1/R_{B\max} = 2\tau_0$ 。

评注：当给出传输特性的表达式非常复杂时，不要被表面现象吓倒，要认真观察，把它分成几部分之和画图表示出来，答案就一目了然了。

16. 分析：这是道典型的误码率求解问题。在数字基带传输系统中，总的传输特性等于发送

滤波器和信道及接收滤波器传输函数的乘积，噪声是在信道中加入的，由于信道传输特性 $C(\omega)=1$ ，故信道输出端噪声的功率谱密度不变，然后通过接收滤波器，故输出噪声的双边带功率谱密度是 $\frac{n_0}{2}|G_R(\omega)|^2$ 。抽样时刻的输出信号是有用信号和噪声的叠加，求出其一维概率密度函数，得到总差错率的表达式 $P_e = P(0)P(1/0) + P(1)P(0/1)$ ，是判决门限 V_d 的函数，我们的目标是使差错率最小，就要使 $dP_e/dV_d = 0$ ，继而求出最佳判决门限和误码率，根据判决时刻接收信号的概率密度曲线求总误码率，然后对判决门限求导并令导数为 0，从而求得最佳判决门限，进而求得最小误码率。

证明：单极性数字基带系统性能分析模型为



设接收端接收滤波器为 $G_R(\omega)$ ，

$$P_n(\omega) = |G_R(\omega)|^2 \frac{n_0}{2}, \quad |\omega| \leq 8\pi/T, \quad \sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_0}{2} |G_R(\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{噪声 } n_R(t) \text{ 的一维概率密度函数 } f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-r^2/2\sigma_n^2}$$

在抽样判决 $t = kT$ 时刻，接收信号取值为 $\begin{cases} A, P(1) \\ 0, P(0) \end{cases}$

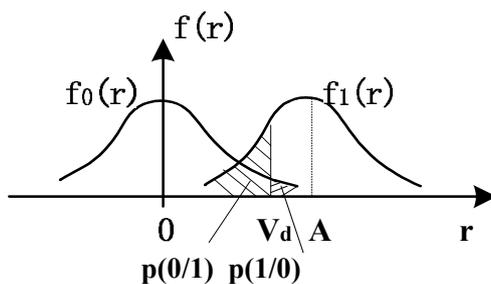
$$r(kT_b) = \begin{cases} A + n_R(kT_b), \text{ 发“1”，以 } P(1) \\ n_R(kT_b), \text{ 发“0”，以 } P(0) \end{cases}$$

当发送“1”码时，

$$f_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

当发送“0”码时，

$$f_0(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right]$$



发“1”错判为“0”的概率

$$\begin{aligned}
 P(0/1) &= P(r < V_d) = \int_{-\infty}^{V_d} f_1(r) dr \\
 &= \int_{-\infty}^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &= \int_{-\infty}^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &\quad + \int_A^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &= \frac{1}{2} + \int_A^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &= \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{V_d-A}{\sqrt{2}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp[-x^2] \sqrt{2}\sigma_n dx \\
 &= \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{V_d-A}{\sqrt{2}\sigma}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2] dx \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left[\frac{V_d-A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right]
 \end{aligned}$$

发“0”错判为“1”的概率

$$\begin{aligned}
 P(1/0) &= P(r > V_d) = \int_{V_d}^{\infty} f_0(r) dr \\
 &= \int_{V_d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &\quad - \int_0^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &= \frac{1}{2} - \int_0^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right] dr \\
 &= \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{V_d}{\sqrt{2}\sigma_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp[-x^2] \sqrt{2}\sigma_n dx \\
 &= \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{V_d}{\sqrt{2}\sigma_n}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2] dx \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left[\frac{V_d}{\sqrt{2}\sigma_n}\right]
 \end{aligned}$$

基带系统的总误码率:

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0) = P(1) \int_{-\infty}^{V_d} f_1(r) dr + P(0) \int_{V_d}^{\infty} f_0(r) dr$$

最佳门限电平:

$$\frac{dP_e}{dV_d} = 0$$

$$P(1)f_1(V_d) - P(0)f_0(V_d) = 0$$

$$P(1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}\right] = P(0) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

$$\ln \frac{P(0)}{P(1)} = \frac{V_d^2 - (V_d - A)^2}{2\sigma_n^2} = \frac{2A\left(V_d - \frac{A}{2}\right)}{2\sigma_n^2}$$

$$V_d^* = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_n^2}{A} \ln \frac{P(0)}{P(1)}$$

当 $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ 时, $V_d^* = \frac{A}{2}$, 得到:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

19. 分析: 注意到是双极性信号, 故等概时的误码率与判决器的输入信噪比有关 $r = A^2/\sigma_n^2$,

其中, A 是接收信号在抽样判决时刻的幅度, A^2 是接收信号在抽样判决时刻的平均功率。

因此, $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\sqrt{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\sqrt{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(A/\sqrt{2}\sigma_n)$ 。反之, 由误码率可以确定输入

信噪比 r , 从而确定抽样判决时刻接收信号的幅度。

解: (1)

$$r = \frac{A^2}{\sigma_n^2} = \frac{1}{0.04} = 25$$

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(A/\sqrt{2}\sigma_n) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\sqrt{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\sqrt{12.5} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(3.54)$$

$$= \frac{1}{2} [1 - \operatorname{erf}(3.54)] = \frac{1}{2} [1 - 0.999999426] = 2.87 \times 10^{-7}$$

(2)

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(A/\sqrt{2}\sigma_n) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\sqrt{\frac{r}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\sqrt{\frac{r}{2}}\right) \leq 10^{-5}$$

$$\operatorname{erf}\sqrt{\frac{r}{2}} \geq 0.99998 \quad \sqrt{\frac{r}{2}} \geq 3 \quad r = \frac{A^2}{\sigma_n^2} \geq 18$$

$$A \geq 0.85$$

以上结论说明:

第一, 在接收信号在判决时刻取值相同和噪声平均功率 σ_n^2 相同的条件下, 双极性基带传输

系统的误码率要低于单极性基带传输系统的误码率, 说明双极性基带传输系统的抗

噪声性能更好。

第二，在相同抗噪声性能的前提下，双极性基带系统接收信号在抽样时刻的幅度比单极性基带系统低一半，说明采用双极性基带系统可以节省发射功率。

评注：(1) 双极性基带系统的抗噪声性能之所以优于单极性系统，是由于其欧式距离即表示 1 和 0 码的两个电平之差，越大，噪声容限也就越大，由于噪声的干扰产生误码的难度就越大。因此，抗噪声性能就好，这跟常说的“距离产生美”是一样的。

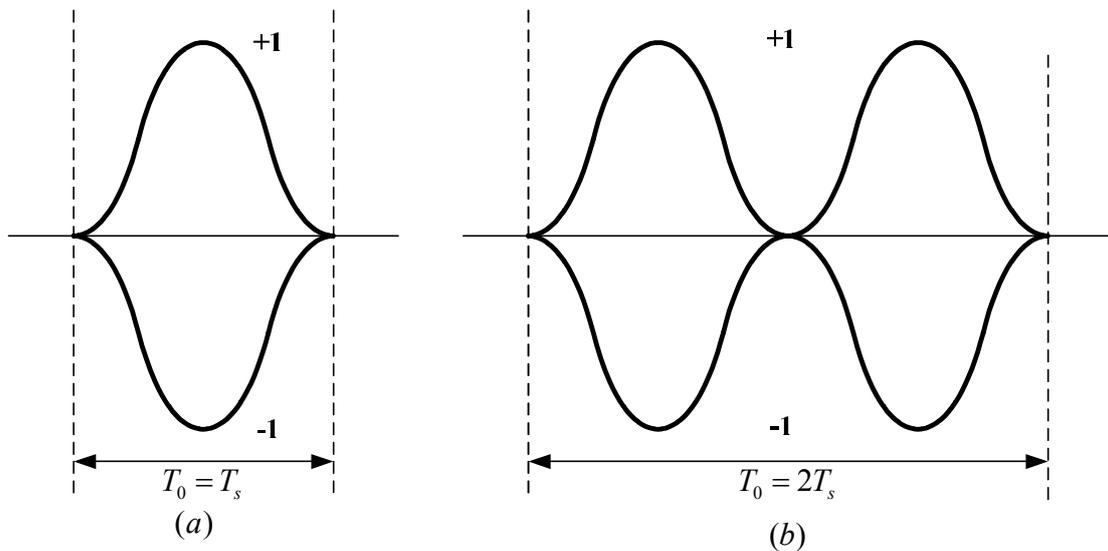
(2) 等概时，双极性数字基带传输系统的最佳判决门限等于 0，与接收信号幅度无关，因此，不受信道传输特性变化的影响。而单极性数字基带系统最佳判决门限与接收信号幅度有关，容易受信道传输特性变化的影响，这也是双极性数字基带系统性能优于单极性数字基带系统的原因之一。

(3) 相同误码率下，双极性基带系统的接收信噪比（本题中 $r \geq 18$ ）要比单极性系统的接收信噪比（上题中 $r \geq 36$ ）低 3dB（即 $10\lg \frac{r_{\text{单}}}{r_{\text{双}}} = 10\lg 2 = 3$ ）。

20. 分析：眼图是将示波器接在数字基带系统接收滤波器的输出端考察由信道特性引起的码间干扰和噪声的影响的一种方法。当调整示波器的扫描周期为 1 个码元宽度时，能看到一个眼图，扫描周期为 2 个码元宽度时，能看到两个眼图。眼睛张开的最大时刻就是抽样判决时刻。

解：(1) 当示波器扫描周期 $T_0 = T_s$ 时，眼图如 (a) 所示。

(2) 当示波器扫描周期 $T_0 = 2T_s$ 时，眼图如 (b) 所示。



(3) 最佳判决时刻在眼睛张开的最大时刻, 故对于 (a) 来说, 最佳判决时刻为 $T_s/2 = T_0/2$, 最佳判决门限为 0, 噪声容限为 1; 故对于 (b) 来说, 最佳判决时刻为 $T_s/2 = T_0/4$, 最佳判决门限为 0, 噪声容限为 1。

第七章 数字带通传输系统

1. 分析：对于 2PSK，要规定好参考相位和矢量图。采用绝对码进行相对调相画 2DPSK 波形和采用相对码进行绝对调相画 2DPSK 波形时，要注意，二者所用的矢量图是一样的。

解：2ASK：设“1”码对应高电平，其已调波为有载波，“0”码对应 0 电平，其已调波为无载波。

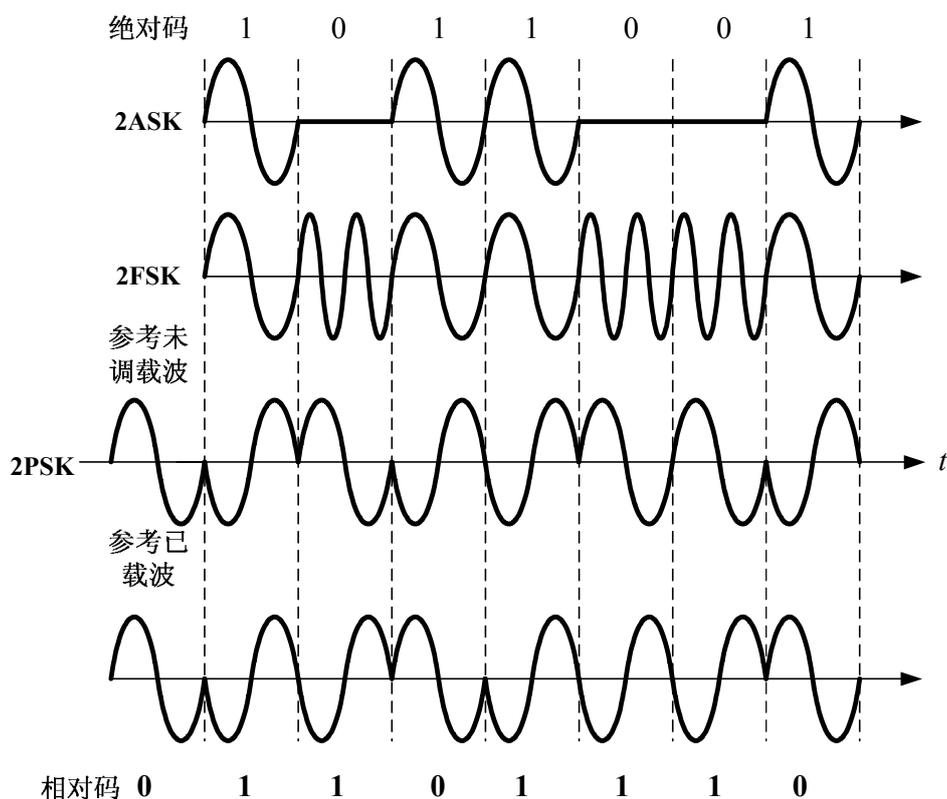
2FSK：设“1”码已调波对应频率 f_1 ，“0”码已调波对应频率 f_2 ，且 $f_2 > f_1$ 。

2PSK：设参考相位为各码元对应未调载波的初相，假定一个码元宽度内有整数个载波周期，采用 A

方式 $\varphi = \begin{cases} 0, & \text{“0”码} \\ \pi, & \text{“1”码} \end{cases}$ ，对于 2DPSK，采取 A 方式 $\Delta\varphi = \begin{cases} 0, & \text{“0”码} \\ \pi, & \text{“1”码} \end{cases}$ ， $\Delta\varphi$ 为本码元

已调波初相与相邻前一码元已调波初相差，参考相位为 0，若用相对码画 2DPSK 波形，是

进行绝对调相，应采用的 A 方式 $\varphi = \begin{cases} 0, & \text{“0”码} \\ \pi, & \text{“1”码} \end{cases}$ ，与相对调相要一一对应。。



评注：注意相对码进行绝对调相得到 2DPSK 波形，因此，有相对码和未调载波初相可以直接画出 2DPSK 波形，反之，由 2DPSK 波形和未调载波初相位可以直接写出相对码，二者是一致的。譬如，该题假设 2DPSK 参考已调波初相为 0，又设定用 A 方式，故参考已调波

初相位和其对应未调载波的初相位一致，肯定为“0”码已调波。

2. 分析：看一个码元宽度内有几个载波周期，只要看二者的周期之比即可。2ASK 信号直接用单极性不归零基带信号和载波相乘，属于双边带调制，已调信号的第一零点带宽加倍，是基带信号第一零点带宽的 2 倍。由于不归零，占空比为 1，故该字基带信号第一零点带宽就等于传码率。因此，OOK 信号带宽为传码率的 2 倍。

解：(1) 载波频率 $f_c = 4\pi \times 10^6 / 2\pi = 2 \times 10^6$ 赫兹，传码率 $R_B = 1000$ 波特，故一个码元宽度内有 2000 个载波周期。

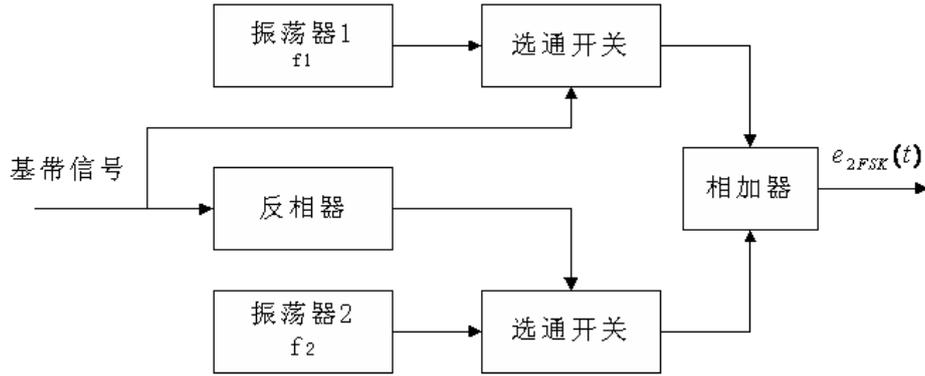
(2) OOK 信号的第一零点带宽 $B = 2R_B = 2000$ 赫兹。

3. 分析：画调制器的原理框图最好从表达式出发，2FSK 信号的表达式为

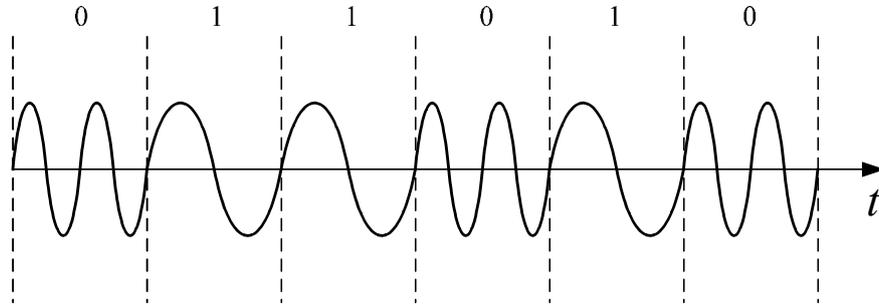
$$e_0(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s) \cos(\omega_1 t + \phi_n) + \sum_n \overline{a_n} g(t - nT_s) \cos(\omega_2 t + \theta_n)$$

既然是 2FSK，则“0”码和“1”码已调波分别对应两种不同频率的载波，因此，用键控法，“1”码控制开关到载波 f_1 ，“0”码控制开关到载波 f_2 即可，根据表达式可知需要需要一个反相器，两个振荡器，两个选通开关和一个加法器，选通开关当输入为“1”时选通，其它状态闭合。2FSK 的功率谱密度是基带信号功率谱密度分别搬移到载频 f_1 和 f_2 出的结果，接收端两个带通滤波器的最理想结果是把处于载频 f_1 和 f_2 处的功率谱互不干扰的完全取出，再采用包络检波或相干解调法进行解调。但当 $|f_2 - f_1|$ 太小，导致两个功率谱相互重叠的话，则经过接收端两个带通滤波器不能完全分开处于载频 f_1 和 f_2 处的功率谱，则上下两支路都有信号输出，导致判决时相互干扰，这时就不能采用包络检波法了，需要用相干解调法，该方法具有抑制正交分量的能力，而 2FSK 所选的两个载波之间的相关系数等于 0，故接收“1”码已调波时，泄露到下一支路的部分针对于载频 f_2 而言是正交的，故和 $\cos 2\pi f_2 t$ 相乘，再经过低通滤波器就被滤掉了，反之，也是一样的。

解：(1) 令“1”码已调波用载频 $f_1 = 1000$ 赫兹表示，“0”已调波用载频 $f_2 = 2000$ 赫兹表示，则键控法的原理框图为



由于 $f_1 = R_b$, $f_2 = 2R_b$, 故“1”码码元宽度内有 1 个载波, “0”码码元宽度内有两个载波。因此, 2FSK 波形为



(2) 2FSK 信号带宽

$$B = |f_2 - f_1| + 2R_b = 3000 \text{ 赫兹}$$

而基带信号功率谱搬移到载频 f_1 和 f_2 处的第一零点带宽均为 $2R_b = 2000$ 赫兹, 这说明 2FSK 信号功率谱密度有重叠, 若采用包络检波法, 则上下支路之间会产生大的干扰, 故要用相干解调法进行解调, 该法具有抑制正交载波的能力, 而 2FSK 所选的两个载波之间的相关系数等于 0, 故接收“1”码已调波时, 泄露到下一支路的部分针对于载频 f_2 而言是正交的, 故和 $\cos 2\pi f_2 t$ 相乘, 再经过低通滤波器就被滤掉了, 反之, 也是一样的。

(3) 2FSK 信号的功率谱密度

单极性不归零信号的功率谱密度为

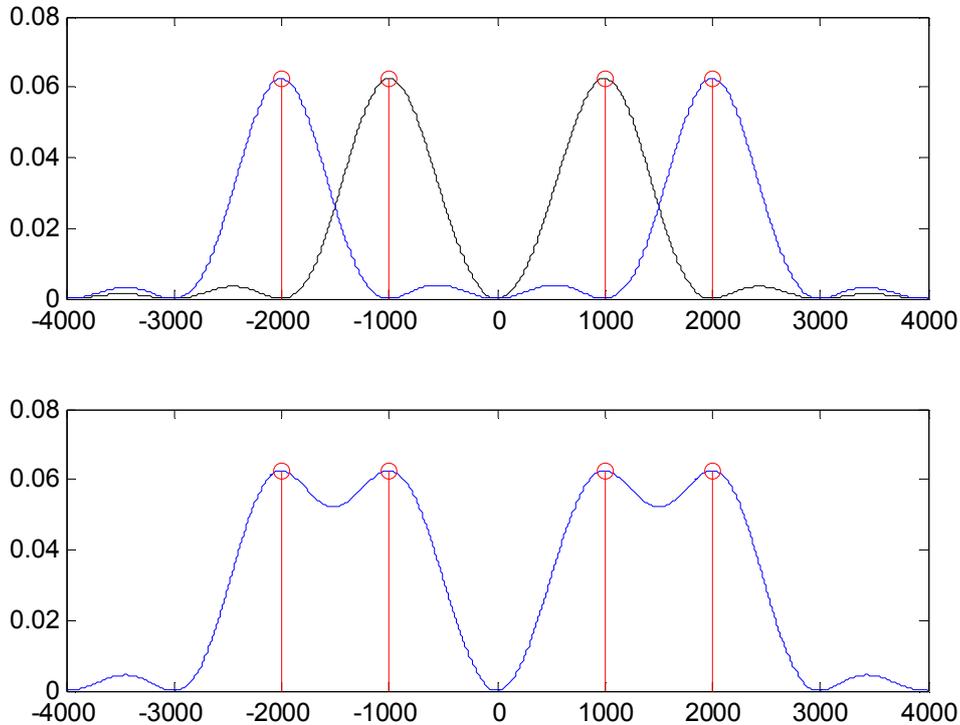
$$P_s(f) = \frac{1}{4} T_s Sa^2(\pi f T_s) + \frac{1}{4} \delta(f)$$

2FSK 信号的功率谱密度

$$\begin{aligned} P_e(f) &= \frac{1}{4} [P_s(f + f_1) + P_s(f - f_1)] + \frac{1}{4} [P_s(f + f_2) + P_s(f - f_2)] \\ &= \frac{T_s}{16} \{Sa^2[\pi(f + f_1)T_s] + Sa^2[\pi(f - f_1)T_s]\} + \frac{1}{16} [\delta(f + f_1) + \delta(f - f_1)] \end{aligned}$$

$$+ \frac{T_s}{16} \{Sa^2[\pi(f + f_2)T_s] + Sa^2[\pi(f - f_2)T_s]\} + \frac{1}{16}[\delta(f + f_2) + \delta(f - f_2)]$$

功率谱密度图为

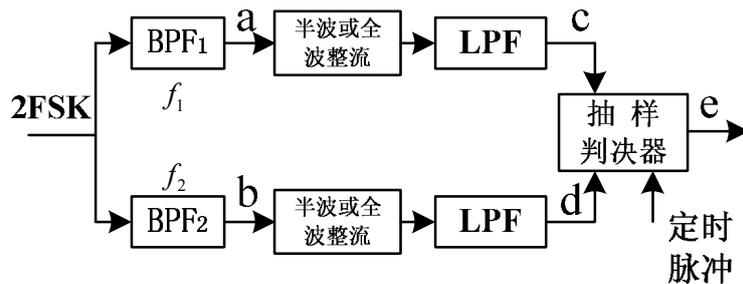


由于， $P_e(f)$ 中连续谱的的幅度实在太小 $T_s/16$ ，所以，图中是把该幅度放大 1000 倍后画出的连续谱，红线代表载频处的离散谱，第一个图展示了基带信号的功率谱分别搬移到载频 f_1 和 f_2 处的结果，第二个图展示的是叠加的后结果，很显然，两个功率谱密度发生了重叠，通过带通滤波器不能单独分开，故不能采用包络检波法。

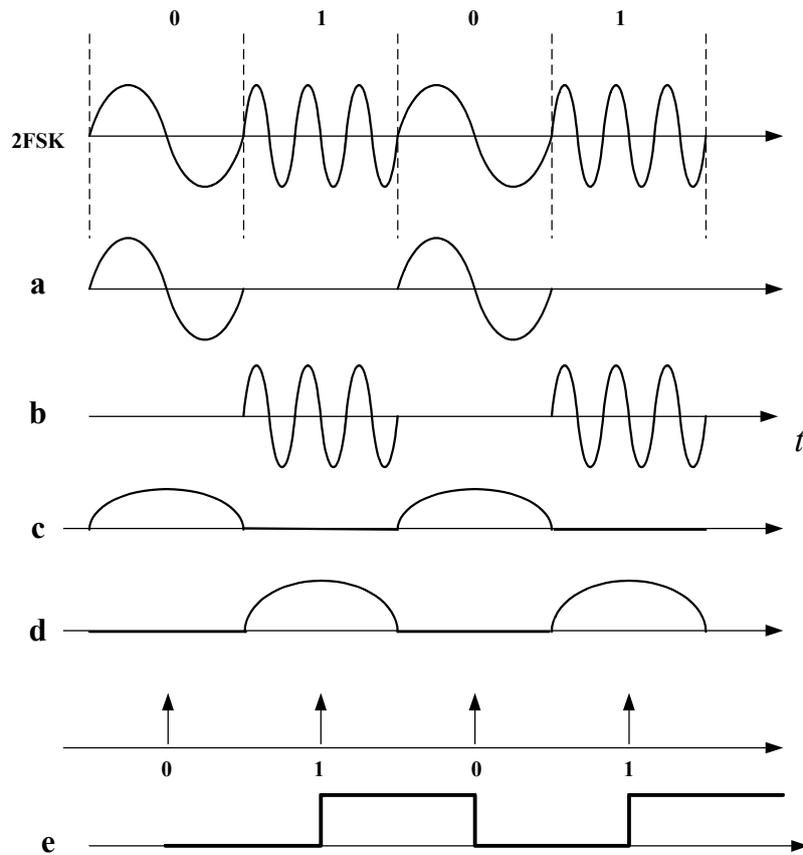
4. 分析：该题只要按流程画即可。

解：“1”码码元宽度内有 3 个载波，“0”码码元宽度内有 1 个载波。

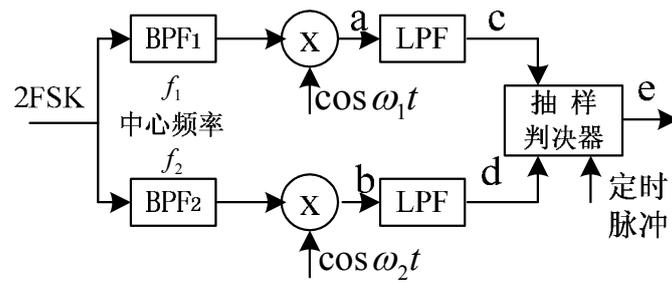
(1) 2FSK 包络检波原理框图为



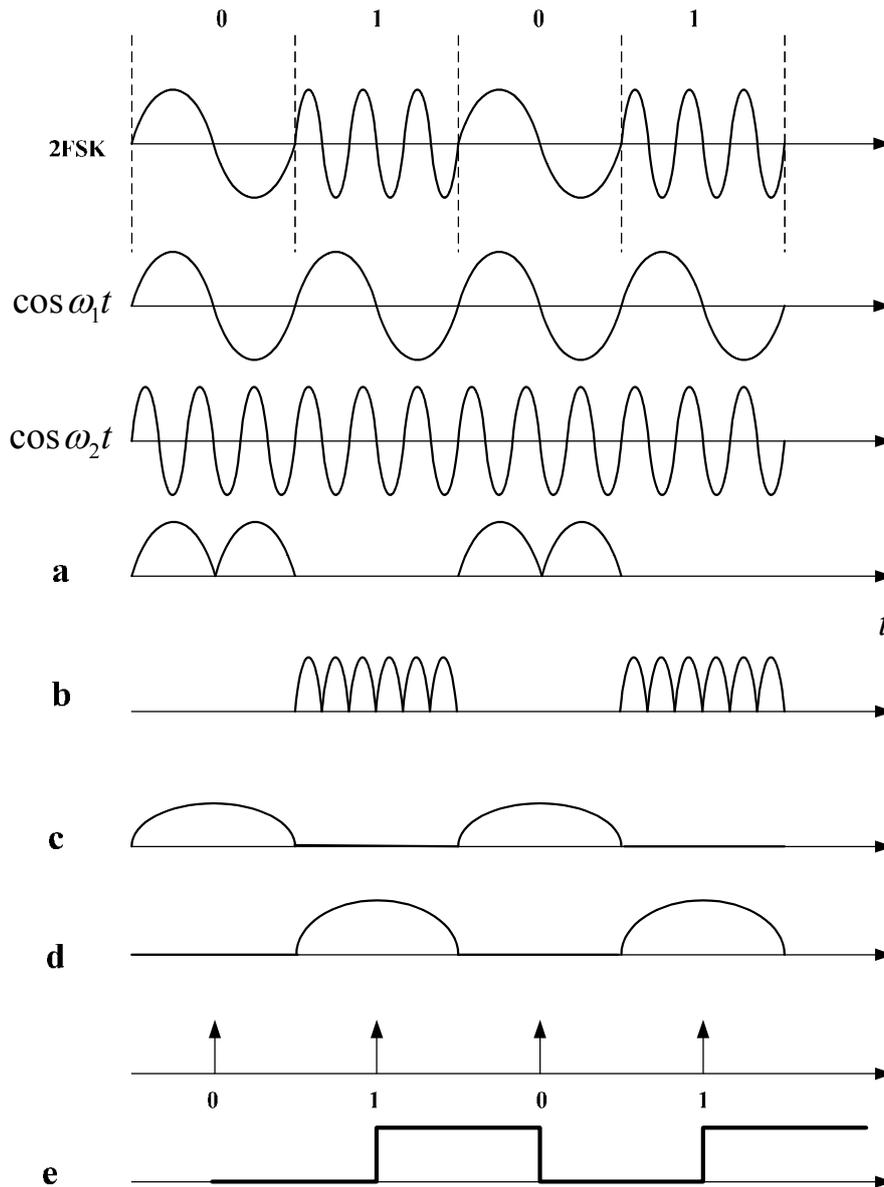
各点时间波形为：



(2) 相干解调器原理框图



各点波形为



(3) 2FSK 信号第一零点带宽

$$B_{2FSK} = |f_2 - f_1| + 2R_B = |3000 - 1000| + 2 \times 1000 = 4000 \text{ (赫兹)}$$

5. 分析：要规定好参考相位和所采用的矢量图。其原理如下：

对于未调载波 $A \cos \omega_c t = A \cos(\omega_c t + 0)$ ，其初相为 0 相，进行 2PSK 调制后，共有 2 种初相位，其信号表达式为

$$s_k(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_i), \quad i=1,2, \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

T_s 为 2 进制符号间隔， $\{\theta_i; i=1,2\}$ 为已调载波的初相位，有 2 种可能的状态。

$$s_k(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_i)$$

$$= A \cos \theta_i \cos \omega_c t - A \sin \theta_i \sin \omega_c t, \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

由于 2PSK 信号有两种表达式及其矢量图 A 方式和 B 方式，故要在 0 到 2π 之间，即单位圆上取两个相位，为追求欧式距离最大，即噪声容限最大，抗噪声性能最好，要求两个相位之间的距离要为等于直径，故选择

$$\theta_i \in \{0, \pi\} \text{ 或 } \theta_i \in \{-\pi/2, \pi/2\}$$

规定：一个码元宽度内有整数倍个载波，这样各个码元对应的未调载波的初相位都相等。“0”码取正电平，“1”码取负电平，这样的话接收端判决时，正电平要判“0”码，负电平要判“1”码。

i 在 A 方式中

$$\theta_i \in \{0, \pi\}, \quad \cos \theta_i = \pm 1 = a_k, \quad \sin \theta_i = 0$$

故

$$s_k(t) = A \times a_k \cos \omega_c t, \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

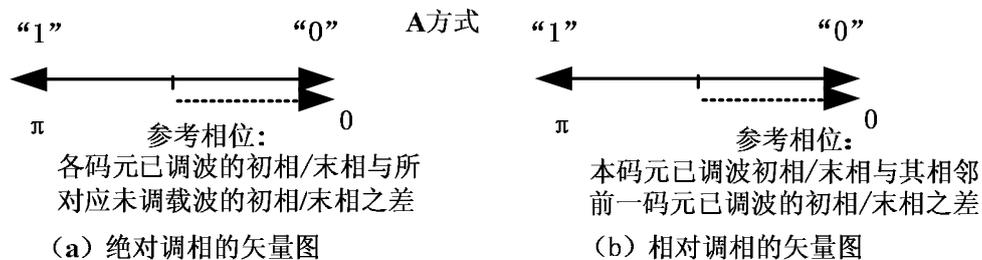
a_k 就是“0”码和“1”码对应的电平值， $a_k = \pm 1$ ，“0”码取正电平 $a_k = +1$ ，“1”码取负电平 $a_k = -1$ 。

当出现“0”码时，

$a_k = +1$ ， $s_k(t) = A \cos \omega_c t = A \cos(\omega_c t + 0)$ ，对应已调波初相为 0 相位，故“0”码已调波初相位与其对应的未调载波初相一致；

当出现“1”码时，

$a_k = -1$ ， $s_k(t) = -A \cos \omega_c t = A \cos(\omega_c t + \pi)$ ，对应已调波初相为 π 相位，故“1”码已调波初相位与其对应的未调载波初相相反。因此，得到 A 方式



ii 在 B 方式中

$$\theta_i \in \{-\pi/2, \pi/2\}, \sin \theta_i = \pm 1 = b_k, \cos \theta_i = 0$$

故

故

$$s_k(t) = -A \times b_k \sin \omega_c t, \quad kT_s \leq t \leq (k+1)T_s$$

b_k 就是“0”码和“1”码对应的电平值, $b_k = \pm 1$, “0”码取正电平 $b_k = +1$, “1”码取负电平 $b_k = -1$ 。

当出现“0”码时,

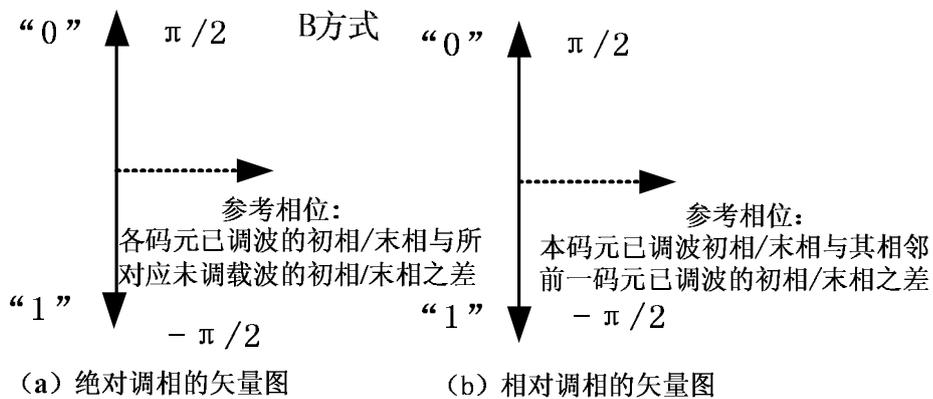
$$b_k = +1, \quad s_k(t) = -A \sin \omega_c t = A \cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{2}\right), \text{ 对应已调波初相为 } \pi/2 \text{ 相位, 故“0”码}$$

已调波初相位与其对应的未调载波初相差 $\pi/2$;

当出现“1”码时,

$$b_k = -1, \quad s_k(t) = A \sin \omega_c t = A \cos\left(\omega_c t - \frac{\pi}{2}\right), \text{ 对应已调波初相为 } -\pi/2 \text{ 相位, 故“1”码}$$

已调波初相位与其对应的未调载波初相差 $-\pi/2$ 。因此, 得到 B 方式



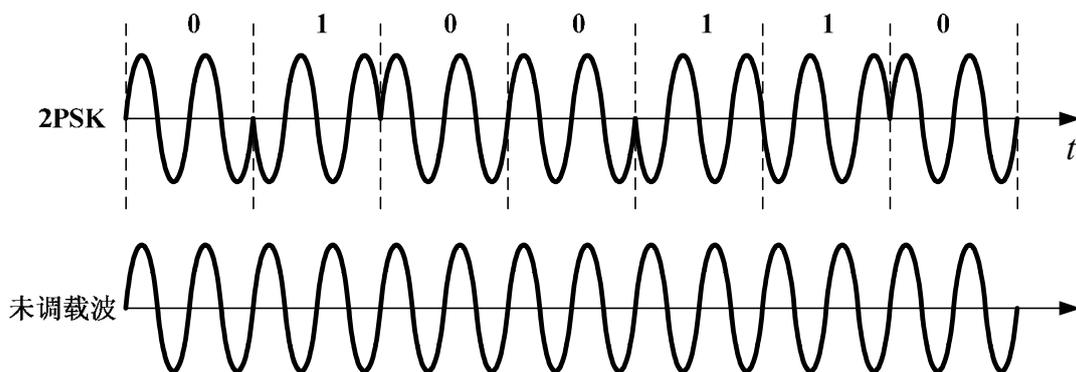
这里, 之所以参考相位均为零, 是因为一个码元宽度内有整数倍个载波时, 未调载波 $A \cos \omega_c t = A \cos(\omega_c t + 0)$ 的初相位为 0。当然, 你也可以设未调载波为 $-A \cos \omega_c t = A \cos(\omega_c t + \pi)$, 这时它的初相位当然为 π , 这样, 参考相位为 π , 即图中虚线所指的实际上是 π 相位, 除此之外, 按 A 或 B 方式画 2PSK 或 2DPSK 时规则是不变的, 注意到参考相位不是指某一个具体的值, 而是指一种相对关系, 参考相位是可变的。

解： $R_B = 1200$ 波特， $f_c = 2400$ 赫兹，所以，一个码元宽度内有两个载波周期。

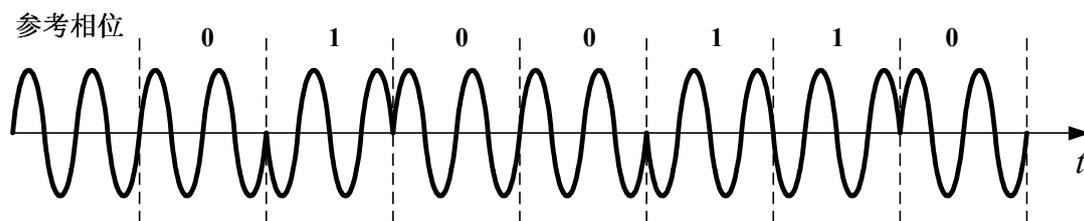
(1) 设参考相位为 0，采用 A 方式

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{“0” 码} \\ \pi, & \text{“1” 码} \end{cases}$$

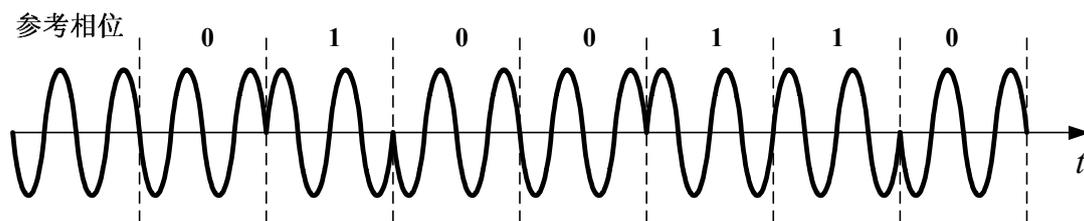
规定相位差为本码元已调波初相与其对应的未调载波的初相差。



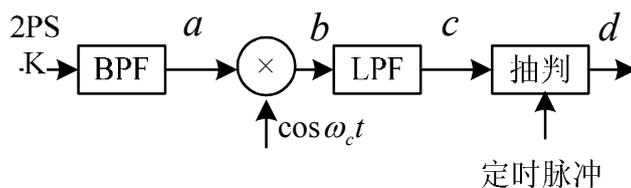
由于当一个码元宽度内有整数个载波时，未调载波的初相位是一致的，故常画成



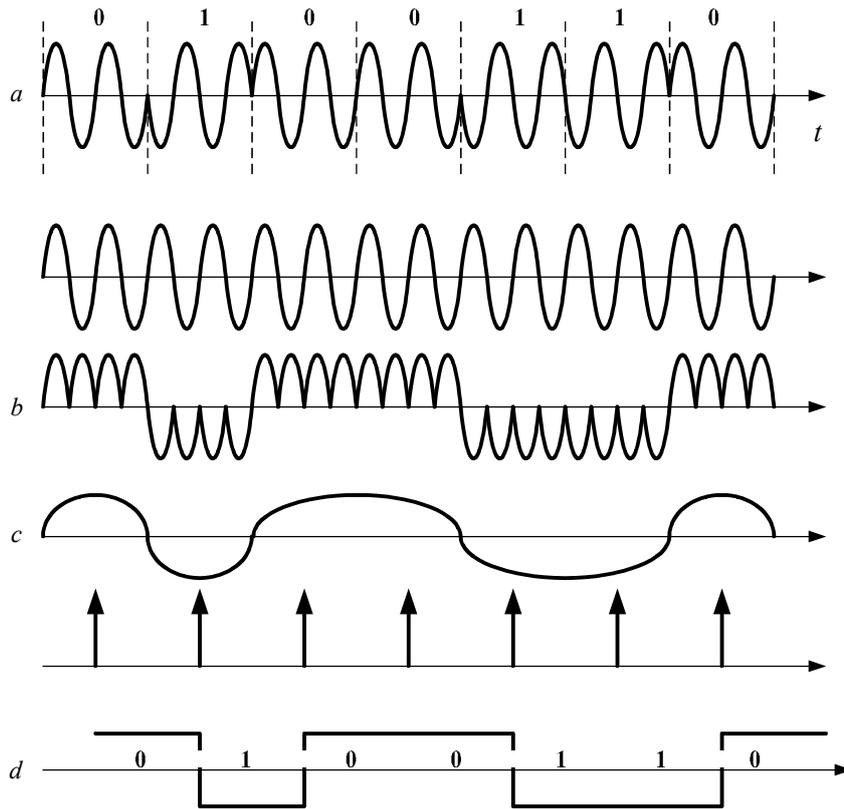
当参考相位为 π ，采用 A 方式，仍旧规定相位差为本码元已调波初相与其对应的未调载波的初相差时，2PSK 波形为



(2) 相干解调器框图为



各点波形为



(3) 双极性 NRZ 码组成的基带信号的功率谱密度为

$$P_s(f) = f_s P(1-P) |G_1(f) - G_2(f)|^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s [PG_1(mf_s) + (1-P)G_2(mf_s)]|^2 \delta(f - mf_s)$$

利用幅度为 1，门宽为 T_s 的矩形表示传输脉冲，则

$$G_1(f) = -G_2(f) = G(f) = T_s sa(\pi f T_s)$$

故

$$P_s(f) = 4f_s P(1-P) |G(f)|^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s [(1-2P)G(mf_s)]|^2 \delta(f - mf_s)$$

将 $P(1) = P = 0.4$ 和 $P(0) = 0.6$ ， $T_s = 1/1200$ 代入，得到

$$P_s(f) = 8 \times 10^{-4} \times sa^2(\pi f T_s) + \frac{1}{25} \sum_{m=-\infty}^{\infty} sa^2(\pi m) \delta(f - mf_s)$$

当 $m = 0$ 时， $sa^2(0) = 1$ ， $m \neq 0$ 时， $sa^2(0) = 0$ ，故

$$P_s(f) = 8 \times 10^{-4} \times sa^2(\pi f T_s) + \frac{1}{25} \delta(f)$$

故 2PSK 的功率谱密度为

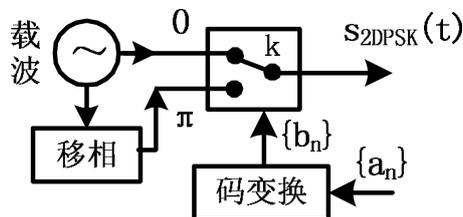
$$P_e(f) = \frac{1}{4} [(P_s(f + f_c) + P_s(f - f_c))] \\ = 2 \times 10^{-4} \times [sa^2(\pi(f + 2400)T_s) + sa^2(\pi(f - 2400)T_s)] + 0.01 \times [\delta(f + 2400) + \delta(f - 2400)]$$

评注：当不等概时，2PSK 信号中含有载频分量，从该题的功率谱密度可以看出，载频分量的功率谱的取值远远大于边带信号的功率谱，可看作是 AM 信号，故接收时可采用包络检波法。

6. 分析：思路与第 5 题一样。

解：\$R_b = 2400\$ 波特，\$f_c = 2400\$ 赫兹，所以，一个码元宽度内有 1 个载波周期。

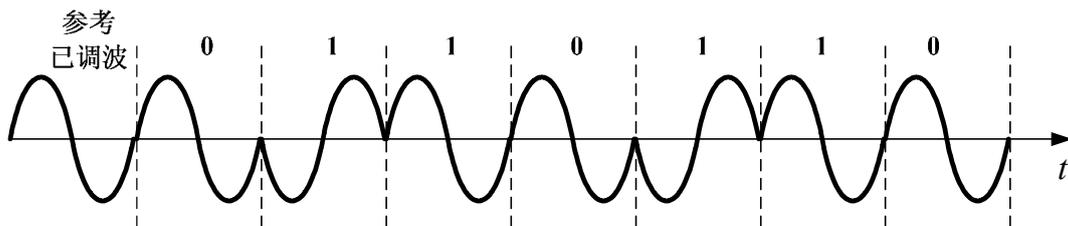
(1) 键控法产生 2DPSK 信号的框图为



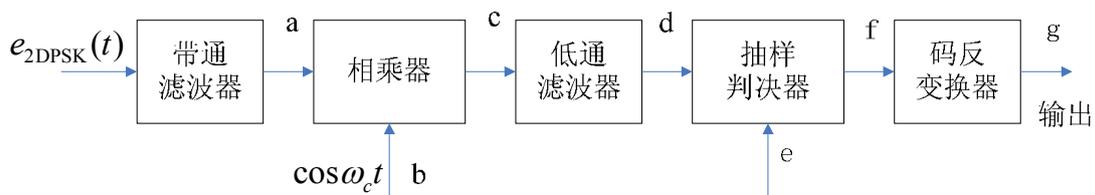
(2) 设参考相位为 0，采用 A 方式

$$\Delta\varphi = \begin{cases} 0, & \text{“0” 码} \\ \pi, & \text{“1” 码} \end{cases}$$

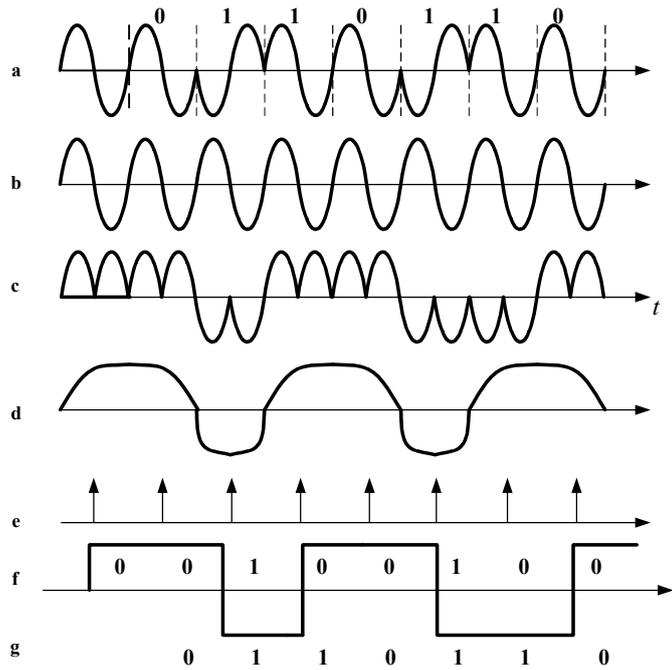
规定相位差为本码元已调波初相与其相邻前一码元已调波的末相差，因此，判决时正电平判“0”码，负电平判“1”码。



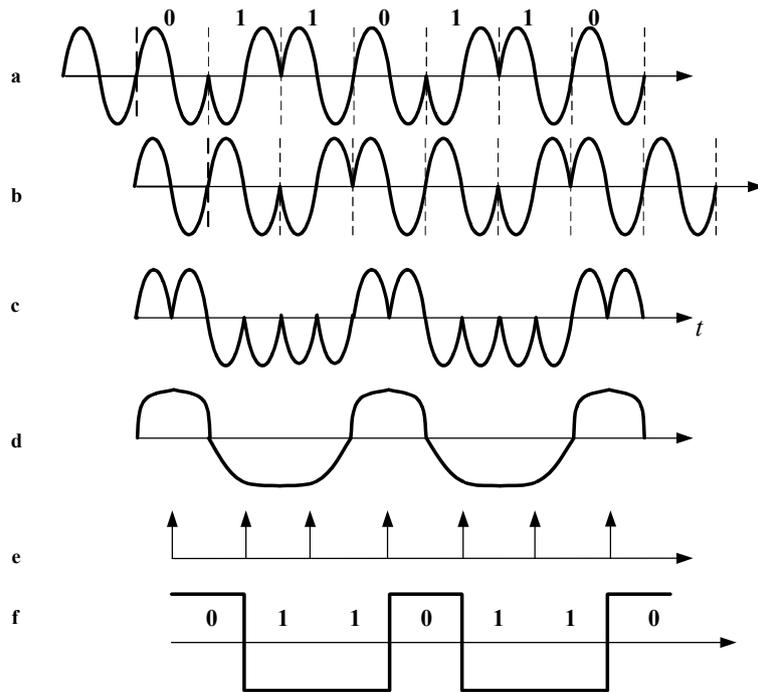
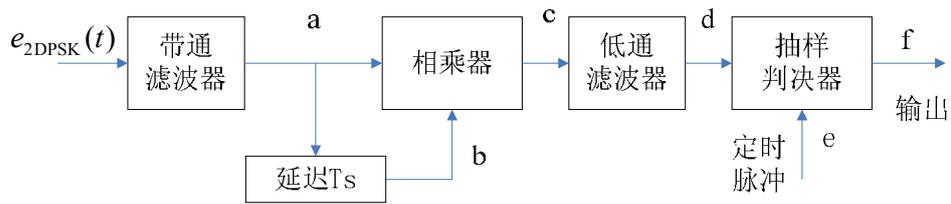
相干解调——码反变换法框图为



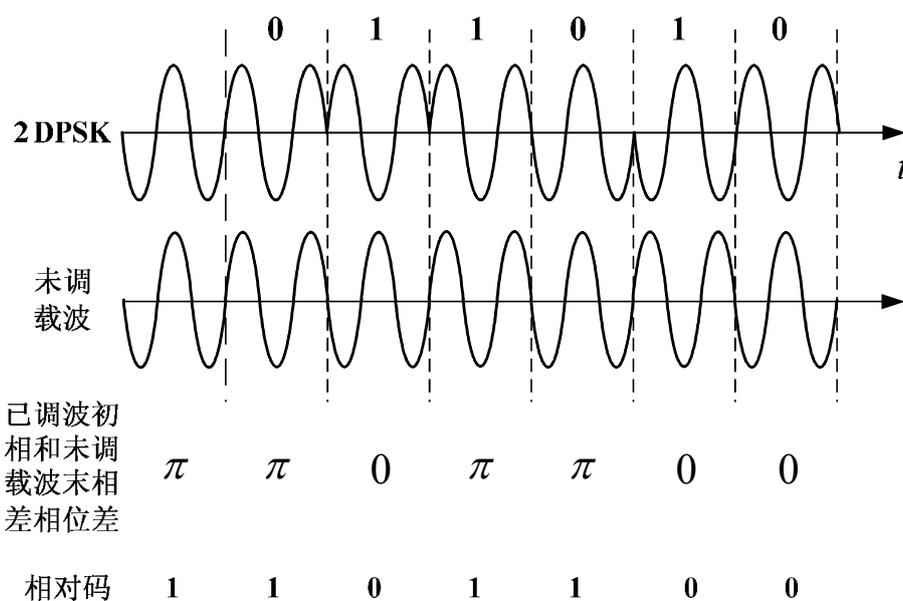
各点波形图为



(3) 差分相干解调框图为



评注：相干解调——码反变换法画图时，本地载波不是随便画的，虽然画反了不影响码反变换器的输出结果。本地载波与发送端的载波保持同频同相，而发送端未调载波的初相位在画2DPSK波形时，已经由参考相位和矢量图决定了，不能随便设，因此，由2DPSK波形写出的相对码是唯一的，本题中，很显然，参考已调波的末相与未调载波的初相位一致，表示“0”码，这也与判决结果是一致的。



对于 B 方式，以上结论不成立，只要相邻码元已调波之间的相位差可以表示“1”码和“0”码就可以了。

8. 分析：对于数字频带传输系统，误码率和接收端解调器的输入信噪比有关，解调器接收到的经信道衰减的信号为 $a \cos \omega_c t$ ，故其平均功率为 $a^2/2$ ，输入噪声的平均功率 $\sigma_n^2 = n_0 B$ ，可计算出输入信噪比 $r = a^2/2\sigma_n^2$ ，继而计算出误码率。

解：接收端带通滤波器带宽

$$B = 2R_b = 4 \times 10^6 \text{ (Hz)}$$

解调器输入信号平均功率为

$$P_i = a^2/2 = 1600 \times 10^{-12}/2 = 8 \times 10^{-10} \text{ (W)}$$

输入噪声平均功率

$$\sigma_n^2 = n_0 B = 6 \times 10^{-18} \times 4 \times 10^6 = 2.4 \times 10^{-11} \text{ (W)}$$

解调器输入信噪比

$$r = a^2/2\sigma_n^2 = \sigma_n^2 = 8 \times 10^{-10} / 2.4 \times 10^{-11} = 33.4$$

(1) 非相干接收时系统误码率

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4} = \frac{1}{2} e^{-8.35} \approx 1.24 \times 10^{-4}$$

(2) 相干接收时系统误码率

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{r}{4}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{8.35} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(2.89) = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{erf}(2.89)] = \frac{1}{2} [1 - 0.99996] = 2 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

评注：相同输入信噪比下，相干接收机的抗噪声性能要优于非相干接收机，但复杂度较高。

10. 分析：OOK 信号最佳判决门限和接收信号幅度、解调器输入端噪声的平均功率和“1”、“0”出现的概率有关。

解：相干接收下的最佳判决门限为

$$b^* = \frac{a}{2} + \frac{\sigma_n^2}{a} \ln \frac{P(0)}{P(1)}$$

(1) $P = 1/2$ 时， $P(0) = P(1) = 1/2$ ，最佳判决门限为

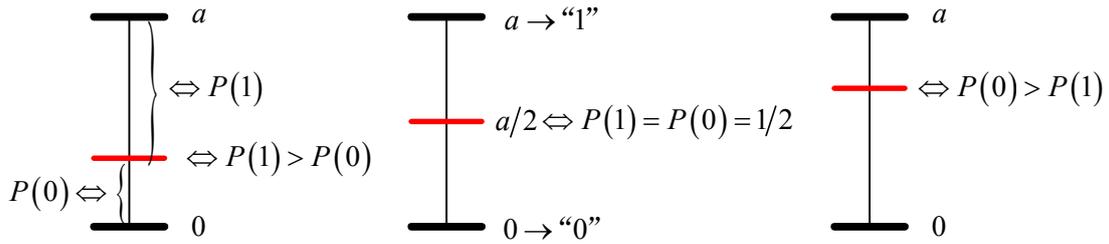
$$b^* = \frac{a}{2}$$

(2) $P < 1/2$ 时， $P(0) = 1 - P > P(1) = P$ ，

$$b^* = \frac{a}{2} + \frac{\sigma_n^2}{a} \ln \frac{P(0)}{P(1)} > \frac{a}{2}$$

故最佳判决门限比 $P = 1/2$ 大。

评注：由最佳判决门限可以看出“1”和“0”码出现的概率。发送“1”码时，抽样判决器在抽样判决时刻信号幅度为 a ，发送“0”码时，抽样判决器在抽样判决时刻信号幅度为 0。等概时，显然最佳判决门限为 $a/2$ ，离 a 和 0 的距离相等，也就是说，接收信号落在 $(0, a/2)$ 和 $(a/2, a)$ 上的概率相等。当“0”码出现的概率高时，判决门限肯定上移，到 0 电平的距



离增加，显然抽样判决值落在该区间的概率大。因此，可根据抽样判决时信号的幅度和最佳判决门限看出“1”和“0”码出现概率的大小，反之也是一样的。另外注意，不等概时的误码率要低于等概，譬如 $P(1) = 1$ ，判决门限 $b^* \rightarrow -\infty$ ，所以判决值肯定大于最佳判决门限，既没有错码。等概是最差的情况，因此，通信原理在研究数字通信系统的抗噪声性能时，都是在研究最差条件下的最小误码率，即最佳抗噪声性能，这和“居安思危”的道理是一样的。

13. 分析：注意将分贝转化为倍数。

解：

$$10 \lg r = 10 \text{ (dB)}$$

$$r = 10$$

(1) 2PSK 误码率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{10} = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{10}) = \frac{1}{2} (1 - 0.99999) = 5 \times 10^{-6}$$

(2) 2DPSK 相干解调——码反变换法误码率

$$P_e = \operatorname{erfc} \sqrt{r} = \operatorname{erfc} \sqrt{10} = 10^{-5}$$

(3) 2DPSK 差分相干解调误码率

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-10} = 2.27 \times 10^{-5}$$

15. 分析：误码率和解调器的输入信噪比有关，而输入信噪比等于输入信号平均功率与噪声平均功率之比，由此，可计算出接收信号功率。

解：接收端带通滤波器带宽

$$B = 2R_b = 2000 \text{ (Hz)}$$

解调器输入噪声平均功率

$$\sigma_n^2 = \frac{n_0}{2} \times 2B = 10^{-10} \times 2 \times 2000 = 4 \times 10^{-7} \text{ (W)}$$

(1) 相干解调 OOK 误码率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{r}{4}} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{r}{4}} \right) \leq 10^{-5}$$

$$\operatorname{erf} \sqrt{\frac{r}{4}} \geq 0.99998$$

$$\sqrt{\frac{r}{4}} \geq 3$$

故解调器输入信噪比

$$r \geq 36$$

$$r = a^2 / 2\sigma_n^2$$

解调器输入信号功率

$$S_i = a^2 / 2 = r\sigma_n^2 = 36 \times 4 \times 10^{-7} = 1.44 \times 10^{-5} \text{ (W)}$$

(2) 非相干解调 2FSK 误码率

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2} \leq 10^{-5}$$

故解调器输入信噪比

$$r \geq -2 \times \ln(2 \times 10^{-5}) = 21.6$$

$$r = a^2 / 2\sigma_n^2$$

解调器输入信号功率

$$S_i = a^2 / 2 = r\sigma_n^2 = 21.6 \times 4 \times 10^{-7} = 8.64 \times 10^{-6} \text{ (W)}$$

(3) 差分相干 2DPSK 误码率

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r} \leq 10^{-5}$$

故解调器输入信噪比

$$r \geq -\ln(2 \times 10^{-5}) = 10.8$$

$$r = a^2 / 2\sigma_n^2$$

解调器输入信号功率

$$S_i = a^2 / 2 = r\sigma_n^2 = 10.8 \times 4 \times 10^{-7} = 4.32 \times 10^{-6} \text{ (W)}$$

(4) 相干 2PSK 误码率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r} = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{r}) \leq 10^{-5}$$

$$\operatorname{erf} \sqrt{r} \geq 0.99998$$

$$\sqrt{r} \geq 3$$

故解调器输入信噪比

$$r \geq 9$$

$$r = a^2 / 2\sigma_n^2$$

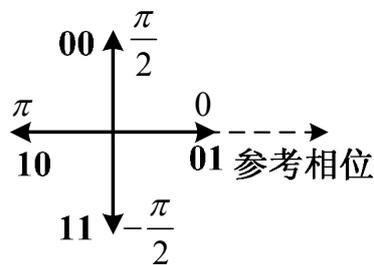
解调器输入信号功率

$$S_i = a^2 / 2 = r\sigma_n^2 = 9 \times 4 \times 10^{-7} = 3.6 \times 10^{-6} \text{ (W)}$$

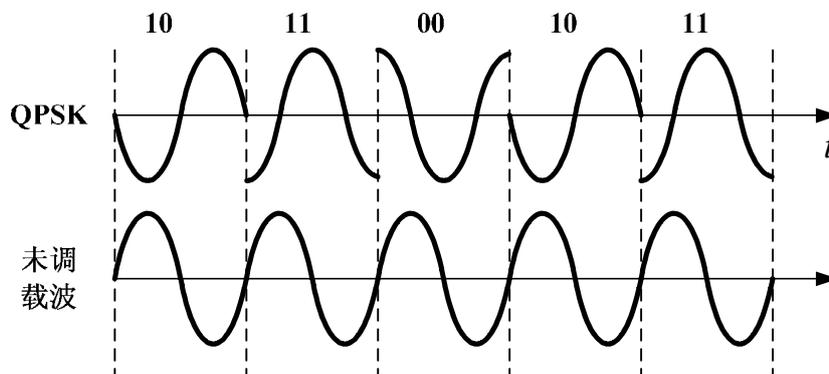
17. 分析: QPSK 和 QDPSK 的画法与 2PSK 和 2DPSK 的画法是一样的, 在参考相位给定的条件下, 由绝对码画 QPSK 进行的是绝对调相, 画 QDPSK 进行的是相对调相, 相位的计算与二进制是一样的。

解: 对所给二进制序列进行串并变换, 得到四进制码元为 10、11、00、10、11

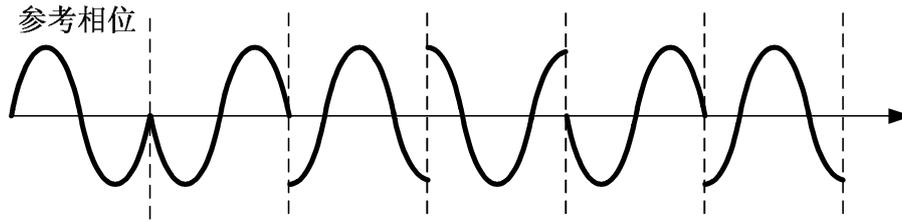
A 方式星座图为



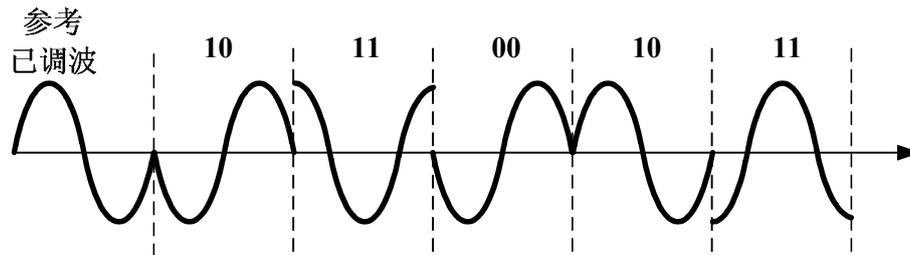
QPSK 波形: 设参考相位为 0, 一个码元宽度内有一个载波, 规定相位差为各码元已调波初相与其对应未调载波末相差。



或画为



QDPSK 波形：设参考相位为 0，一个码元宽度内有一个载波，规定相位差为本码元已调波初相与其相邻前一码元已调波末相。



20. 分析：对于频带系统的最小带宽可以这样理解。先让数字基带信号按照奈奎斯特第一准则通过一个低通滤波器，则低通滤波器的冲激响应就是传输波形，也就是说，低通滤波器的输出信号之间无码间干扰，它的带宽就是低通滤波器的带宽，若传码率为 R_B ，则所需要的等效奈奎斯特带宽是最小等效带宽 $f_N = R_B/2$ ，则低通滤波器带宽 $B = (1 + \alpha) f_N$ ，该带宽即为经过低通滤波器的数字基带信号的带宽，再和载波相乘，变成频带信号，带宽加倍 $2(1 + \alpha) f_N = (1 + \alpha) R_B$ ，频带利用率为 $1/(1 + \alpha)$ 波特/赫兹。当用部分响应波形时， $\alpha = 0$ ，故频带系统最小带宽就等于传码率，此时最大频带利用率为 1 波特/赫兹。

解：(1) 4PSK 信号的传码率

$$R_B = 1200 \text{ (波特)}$$

频带系统最大频带利用率 $\eta = R_B/B = 1$ 波特/赫兹，故所需最小理论带宽 $B = R_B = 1200$ 赫兹。

(2) 信道带宽不变，即最大传码率不变，仍为 1200 波特。比特率，即传信率加倍后， $R_b = 4800$ 比特/秒，即一个码元要携带 4 比特信息量

$$R_b = R_B \log 16$$

需采用 16PSK 或 16QAM 信号进行传输。

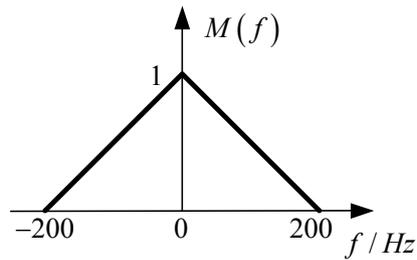
评注：注意频带和基带的等效奈奎斯特带宽的应用，所谓的频带系统的最小带宽，就是让基带信号先通过一个低通滤波器实现无码间串扰，滚降系数 $\alpha \leq 1$ 时，信号的带宽明显大于滤

波器带宽，由于频域是相乘的关系，先通过一个低通滤波器后信号的带宽就变得和低通滤波器一样了，再对低通滤波器输出信号进行载波调制，带宽自然加倍。故最大频带利用率从 $2/(1+\alpha)$ 波特/赫兹，变成了 $1/(1+\alpha)$ 波特/赫兹，因此，基带的等效奈奎斯特带宽等于传码率的一半，而频带系统的等效奈奎斯特带宽就等于传码率。

第九章 模拟信号的数字传输

1. 分析：所谓已抽样信号的频谱就是把待抽样信号的频谱 $M(f)$ 从原点搬移到整数倍的抽样速率处 nf_s ，即 $M(f - nf_s)$ 。

解： $m(t)$ 的频谱图为

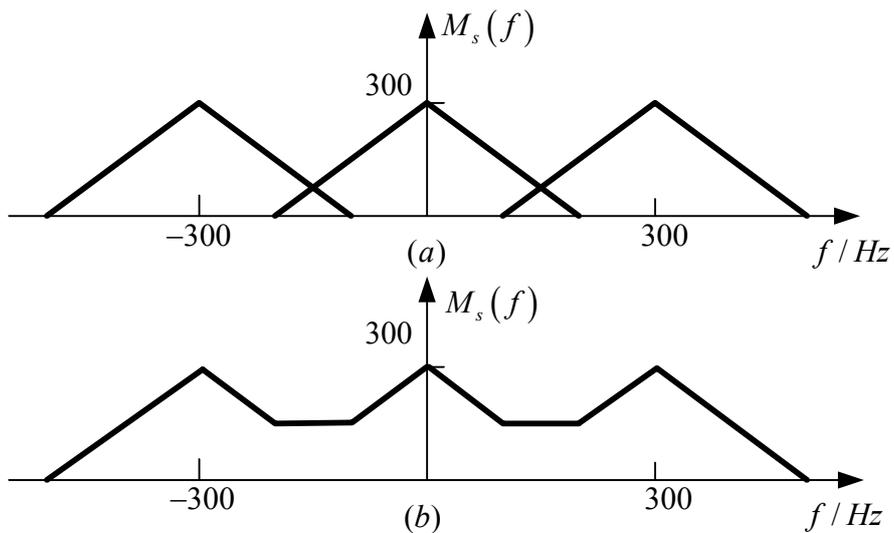


当采样频率为 f_s 时，抽样信号频谱为

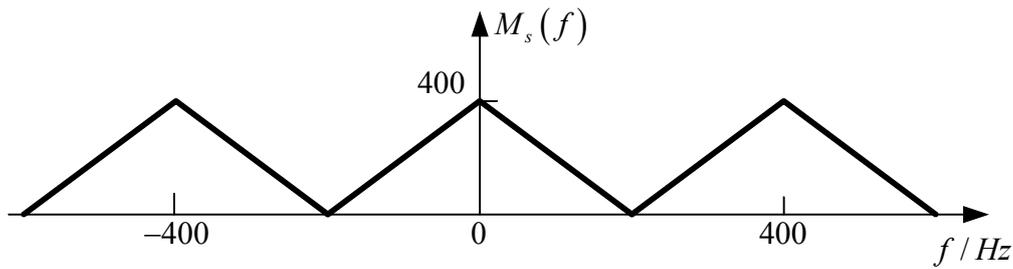
$$M_s(f) = \frac{1}{T} \sum_n M(f - nf_s)$$

T 为采样间隔。

(1) 采样速率 $f_s = 300$ Hz 时，频谱图如 (a) 所示，由于 $f_s \leq 2f_H = 400$ Hz，显然频谱有重叠，叠加后的结果如图 (b) 所示。



(2) 采样速率 $f_s = 400$ Hz 时，频谱图如 (a) 所示，由于 $f_s = 2f_H = 400$ Hz，满足低通抽样定理，频谱没重叠如图所示。



评注：要想从理想抽样信号中恢复原始低通信号，采样速率必须满足低通采样定理。否则，采样后信号频谱有重叠，接收端通过低通滤波器无法恢复原来信号的频谱。

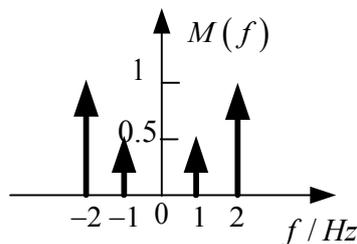
2. 分析：要想确定一个信号的采样速率，满足两个条件：（1）确定该信号是低通信号还是带通信号，以便采用低通抽样定理还是带通抽样定理。（2）对于低通信号，要确定最高频率，采样频率要大于等于最高频率的 2 倍，对于带通信号，要确定截止频率和带宽。若所给信号频率范围 (f_L, f_H) ， $B = f_H - f_L$ ，若 $f_L > B$ ，则为带通信号，否则为低通信号。

解：（1）所给信号有两个频率分量 $f_L = 1\text{Hz}$ ， $f_H = 2\text{Hz}$ ，带宽 $B = f_H - f_L = 1\text{Hz}$ ， $B = f_L$ ，故为低通信号，因此，采样频率 $f_s > 2f_H = 4\text{Hz}$ ，即抽样间隔 $T = 1/f_s < 0.25$ 秒时，可无失真地从已抽样信号中恢复出原始信号。

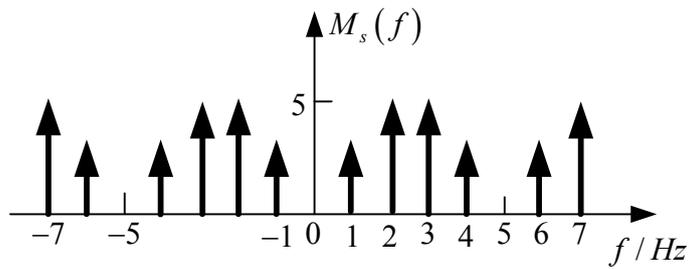
（2） $m(t)$ 的频谱为

$$M(f) = \frac{1}{2}[\delta(f+1) + \delta(f-1)] + \delta(f+2) + \delta(f-2)$$

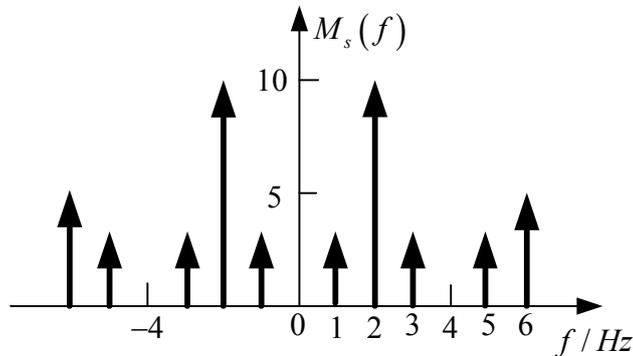
如图所示。



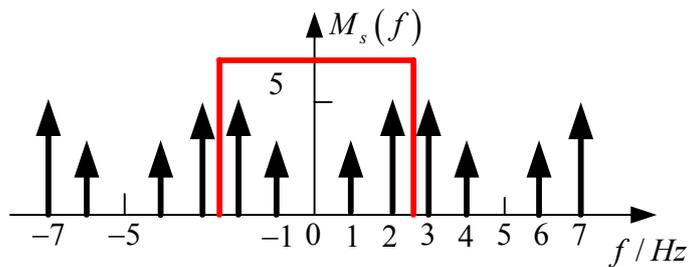
采样频率 $f_s = 1/T = 5\text{Hz}$ ， $M_s(f) = \frac{1}{T} \sum_n M(f - nf_s)$ ，频谱图为



评注：对于这样具有离散频谱的低通信号进行采样，要注意采样速率 $f_s > 2f_H$ ，不能取等号，否则，已抽样信号频谱会有重叠，例如该题，若采样频率为 4Hz，已抽样信号的频谱图如下：

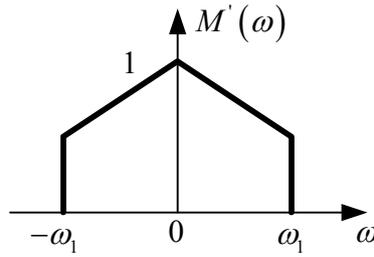


很明显， $f = 2\text{Hz}$ 处发生了失真，接收端通过理想低通滤波器无法恢复原始信号 $m(t)$ 。另在接收端，理想低通滤波器的带宽应满足 $f_H < B < f_s - f_H$ ，即红线所示。



3. 分析：对一个低通信号进行抽样时，重要的是要确定该信号的最高频谱，由此，确定抽样速率。通信系统具有完美的对偶性，抽样信号的恢复也不例外，最终的目标是要把原信号 $m(t)$ 恢复出来。

解： $m'(t)$ 的频谱 $M'(\omega) = M(\omega)H_1(\omega)$ 如图所示。

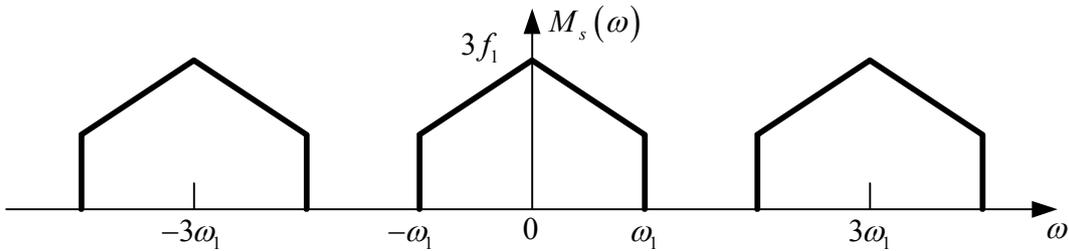


该信号最高频率 $f_H = \omega_1/2\pi = f_1$ ，对该信号进行采样，抽样速率 $f_s > 2f_1$ 。

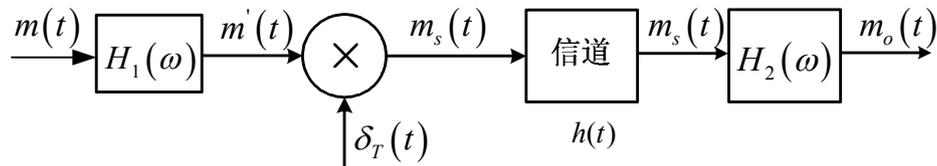
(2)

$$M_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_n M'(\omega - n\omega_s)$$

当 $f_s = 3f_1$ ，已抽样信号的频谱为



由通信系统的对偶性



$$\begin{aligned} M_s(\omega)H_2(\omega) &= \frac{1}{T} \sum_n M'(\omega - n\omega_s)H_2(\omega) \\ &= \frac{1}{T} M'(\omega)H_2(\omega) = \frac{1}{T} M(\omega)H_1(\omega)H_2(\omega) = \frac{1}{T} M(\omega) \end{aligned}$$

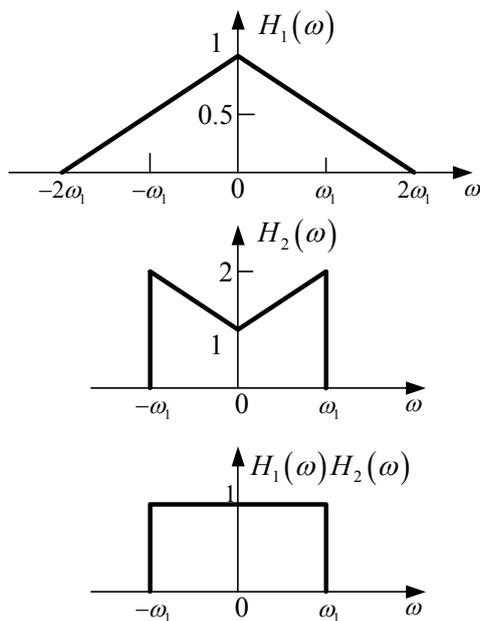
因此， $H_2(\omega)$ 的带宽应和原信号 $m(t)$ 相同，为 f_1 。

所以，

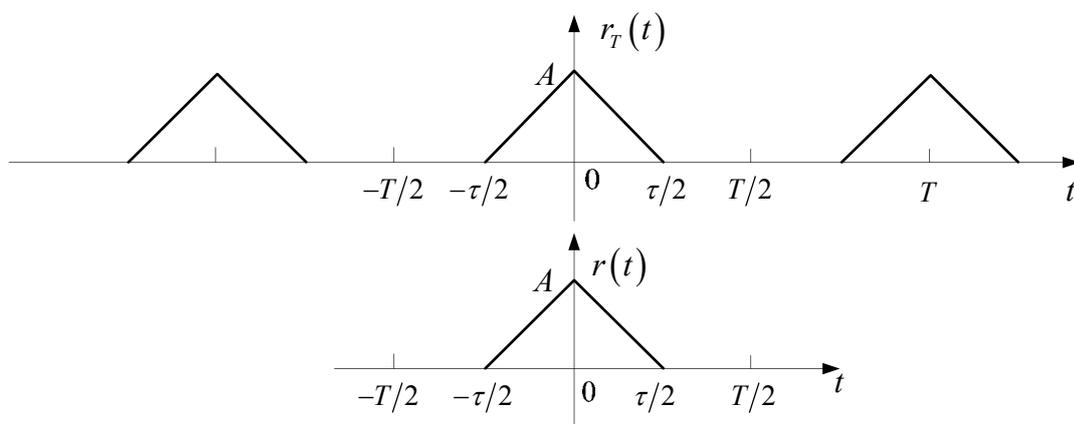
$$H_2(\omega) = \begin{cases} 1/H_1(\omega), & |\omega| \leq \omega_1 \\ 0, & |\omega| > \omega_1 \end{cases}$$

评注：通信的目的是为了传递消息，因此，在接收端应该能恢复发送的信号，这就要求通信系统具有对偶性，接收端和发送端是一一对应的，这是通信系统的一个典型特点，也为大家

学习通信原理需要把握的重要环节。该题 $H_1(\omega)$ 和 $H_2(\omega)$ 之间的关系为



4. 分析：本题将抽样脉冲变成了周期三角脉冲，其流程与理想抽样是一样的，分析过程完全一样，需要用到第 2 章第 8 题和第 3 章第 15 题所用的规律。



$$r_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n t/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad f_0 = 1/T$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r_T(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} r(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{A\tau}{2} \cdot sa^2 \left(\frac{2\pi n f_0 \cdot \frac{\tau}{4}}{\text{注意 门宽的四分之一}} \right) = \frac{A\tau}{2T} \cdot sa^2 (\pi n f_0 \tau/2)$$

利用:

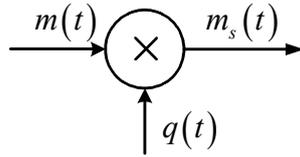
$$2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$$

$$e^{\pm j2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega \mp n\omega_0) = 2\pi\delta(\omega \mp 2\pi n f_0) = \delta(f \mp n f_0)$$

得到:

$$\begin{aligned} R_T(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{2T} \cdot sa^2(\pi n f_0 \tau / 2) \cdot \underbrace{2\pi\delta(\omega - n\omega_0)}_{\text{注意}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{2T} \cdot sa^2(\pi n f_0 \tau / 2) \cdot \underbrace{\delta(f - n f_0)}_{\text{注意}} = R_T(f) \end{aligned}$$

解:



$$m_s(t) = m(t) \times q(t)$$

由于 $q(t)$ 是幅度为 1, 门宽为 2τ , 周期为 $T = 1/2f_m$ 的三角周期信号, 故其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_s) \\ C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} q(t) e^{-j2\pi n f_s t} dt = \frac{\tau}{T} \cdot sa^2(\pi n f_s \tau) = 2f_m \tau sa^2(\pi n f_s \tau) \\ Q(\omega) &= 2f_m \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} sa^2(\pi n f_s \tau) 2\pi\delta(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

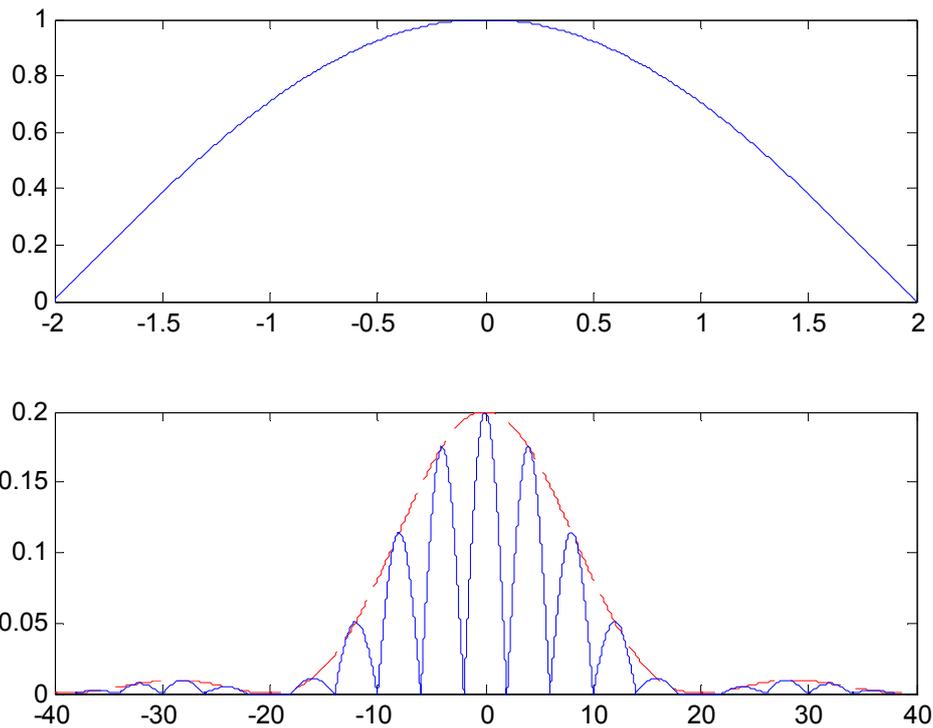
或

$$Q(f) = 2f_m \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} sa^2(\pi n f_s \tau) \delta(f - n f_s)$$

故

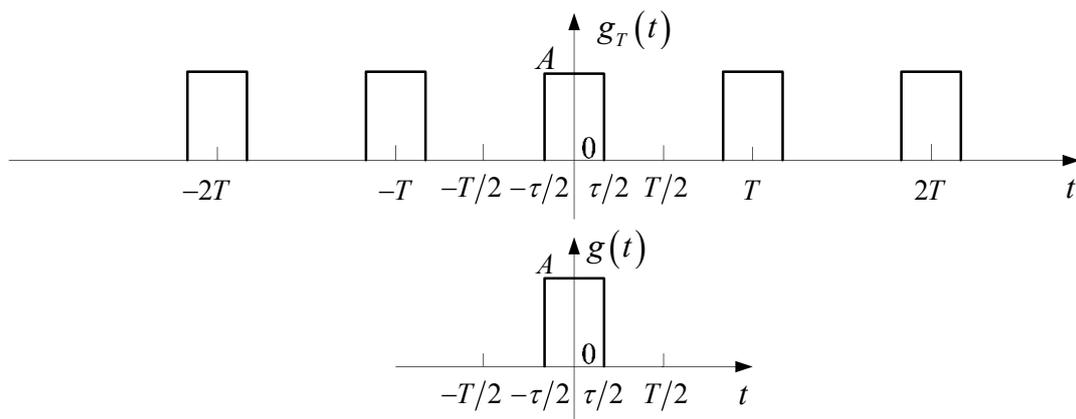
$$M_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * Q(\omega) = 2f_m \tau \sum_n sa^2(\pi n f_s \tau) M(\omega - n\omega_s) = M_s(f)$$

假定 $f_m = 2$ Hz, $\tau = 0.05$ 秒, 则 $f_s = 4$ Hz, 用 matlab 画出的 $m(t)$ 和 $m_s(t)$ 频谱如图所示。



评注：(1) 抽样定理的证明流程所用到的规律是一致的，无非是周期函数的傅里叶变换，这在习题中已经用了不下 3 处，规律很好记，大家应该熟练掌握。(2) 注意 $M_s(\omega)$ 和 $M_s(f)$ 的区别，若 $M_s(\omega)$ 不含 $\delta(\omega)$ 函数， $M_s(\omega) = M_s(f)$ ，若含 $\delta(\omega)$ ，只需把 $2\pi\delta(\omega)$ 部分利用 $2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$ ，就可以把 $M_s(\omega)$ 换成 $M_s(f)$ ，例如本题中的 $Q(\omega)$ 和 $Q(f)$ 。

5. 分析：该题和地题是一样的，用到的规律与第二章第 1 题是一样的。



$$g_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n t / T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad f_0 = 1/T$$

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_T(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \\
&= \frac{1}{T} \cdot \underset{\text{面积}}{A\tau} \cdot \underset{\substack{\text{注意} \\ \text{门宽的三分之一}}}{sa\left(\frac{2\pi n f_0 \cdot \tau}{2}\right)} = \frac{A\tau}{T} \cdot sa(\pi n f_0 \tau)
\end{aligned}$$

利用:

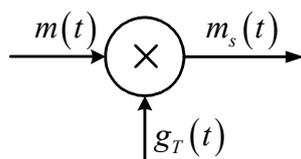
$$2\pi\delta(\omega) = \delta(f)$$

$$e^{\pm j2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega \mp n\omega_0) = 2\pi\delta(\omega \mp 2\pi n f_0) = \delta(f \mp n f_0)$$

得到:

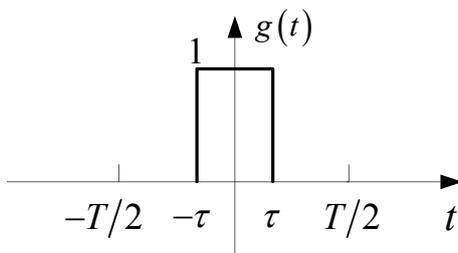
$$\begin{aligned}
G_T(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_0) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \cdot sa(\pi n f_0 \tau) \cdot \underset{\text{注意}}{2\pi\delta(\omega - n\omega_0)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \cdot sa(\pi n f_0 \tau) \cdot \underset{\text{注意}}{\delta(f - n f_0)} = G_T(f)
\end{aligned}$$

解:



采样速率 $f_s \geq 2f_m$

$$m_s(t) = m(t) \times g_T(t) = \sum_n m(nT) g(t - nT)$$



由于 $g_T(t)$ 是幅度为 1, 门宽为 2τ , 周期为 $T = 1/f_s$ 的矩形周期信号, 故其傅里叶变换为

$$G_T(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n 2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g_T(t) e^{-j2\pi n f_s t} dt = \frac{2\tau}{T} \cdot sa(2\pi n f_s \tau)$$

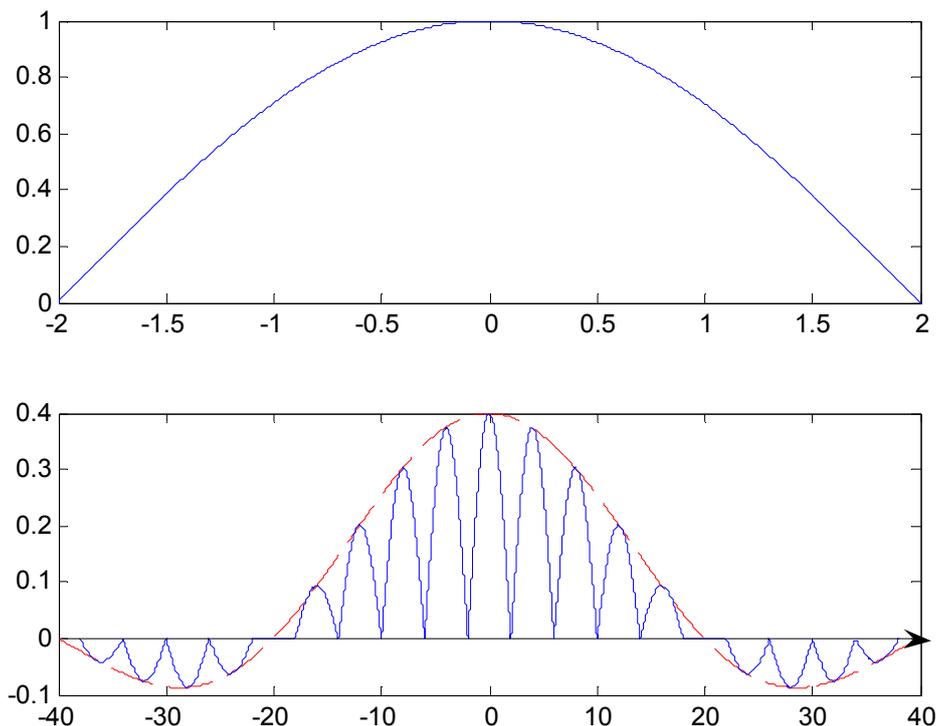
$$G_T(\omega) = \frac{2\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} sa(n\omega_s \tau) 2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$$

或

$$G_T(f) = \frac{2\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} sa(n\omega_s \tau) \delta(f - n f_s)$$

$$M_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} M(\omega) * Q(\omega) = \frac{2\tau}{T} \sum_n sa(n\omega_s \tau) M(\omega - n\omega_s) = M_s(f)$$

评注：注意规律的应用。假定 $f_m = 2\text{Hz}$ ， $\tau = 0.05$ 秒， $f_s = 4\text{Hz}$ ，用 matlab 画出的 $m(t)$ 和 $m_s(t)$ 频谱如图所示。



7. 分析：均匀量化是将信号的动力范围（即输入信号的取值范围），均匀分成 M 个间隔，取各间隔的中点电平作为量化电平，故有 M 种电平，每个电平编 N 位码，满足 $2^{N-1} \leq M \leq 2^N$ 。量化间隔的大小为动力范围除以电平数。

解：当 $\cos \omega t = \pm 1$ 时，输入信号的动态范围为 $(-1V, 19V)$ 。设编码位数 N ，则所编的二进制码组的位数必须能够表示 40 种量化电平，即

$$2^{N-1} \leq 40 \leq 2^N$$

故 $N \geq 6$ ，最小需要 6 位二进制码。

量化间隔

$$\Delta v = \frac{19 - (-1)}{40} = 0.5 \text{ (V)}$$

8. 分析：计算均匀量化的信号量化噪声功率比需要按照所给的电平数对信号动态范围进行等间隔划分，确定各段的量化电平，以各段为单位计算量化信号的平均功率和量化噪声的平均功率，再在动态范围内相加即可求得量化信号和量化噪声的平均功率。

解：信号动态范围为 $(-1V, 1V)$ ，均匀量化成 4 电平，故量化间隔

$$\Delta v = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ (V)}$$

量化区间终点为 -1、-0.5、0、0.5、1。取各段中点坐标作为量化电平，则 4 个量化电平为 -0.75、0.25、0.25、0.75。

因此，量化噪声功率

$$N_q = \int_{-1}^1 (x - m_i)^2 f(x) dx$$

由于 $f(x)$ 为偶函数，故

$$\begin{aligned} N_q &= 2 \left[\int_0^{0.5} (x - 0.25)^2 (1 - x) dx + \int_{0.5}^1 (x - 0.75)^2 (1 - x) dx \right] \\ &= 2 \left[\int_0^{0.5} (x - 0.25)^2 (1 - x) dx + \int_0^{0.5} (x - 0.25)^2 (0.5 - x) dx \right] \\ &= 2 \int_0^{0.5} (x - 0.25)^2 (1 - x + 0.5 - x) dx \\ &= 2 \int_0^{0.5} (x - 0.25)^2 (1.5 - 2x) dx \\ &= 4 \int_0^{0.5} (x - 0.25)^2 (0.25 - x + 0.5) dx \\ &= 2 \int_0^{0.5} (x - 0.25)^2 dx - 4 \int_0^{0.5} (x - 0.25)^3 dx \\ &= \frac{2(x - 0.25)^3}{3} \Big|_0^{0.5} - (x - 0.25)^4 \Big|_0^{0.5} \\ &= \frac{1}{48} \end{aligned}$$

量化信号功率：

$$\begin{aligned}
s_q &= \int_{-1}^1 m_i^2 f(x) dx \\
&= 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \int_0^{0.5} (1-x) dx + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \int_{0.5}^1 (1-x) dx \\
&= \frac{1}{8} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^{0.5} + \frac{9}{8} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{0.5}^1 \\
&= \frac{3}{64} + \frac{9}{64} = \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

故，量化噪声功率比为

$$\frac{S_q}{N_q} = \frac{3/16}{1/48} = 9$$

9. 分析：A 率 13 折线要把握好分段的原则，清楚各段的段落起始电平和量化间隔，第一段和第二段的长度是一样的，量化间隔也一样，从第三段开始，段落长度加倍，故量化间隔也加倍，段落起始电平也加倍，如下图所示。

段落编号	段落码 C ₂ C ₃ C ₄	段落起始电平	量化间隔	段内码编号	段内码 C ₅ C ₆ C ₇ C ₈	权重
8	1 1 1	2048	64	16	1 1 1 1	2 ⁰
7	1 1 0	1024	32	15	1 1 1 0	2 ¹
6	1 0 1	512	16	14	1 1 0 1	2 ⁰
5	1 0 0	256	8	13	1 1 0 0	2 ²
4	0 1 1	128	4	12	1 0 1 1	2 ⁰
3	0 1 0	64	2	11	1 0 1 0	2 ¹
2	0 0 1	32	1	10	1 0 0 1	2 ⁰
1	0 0 0	16	1	9	1 0 0 0	2 ³
		0		8	0 1 1 1	2 ⁰
				7	0 1 1 0	2 ¹
				6	0 1 0 1	2 ⁰
				5	0 1 0 0	2 ²
				4	0 0 1 1	2 ⁰
				3	0 0 1 0	2 ¹
				2	0 0 0 1	2 ⁰
				1	0 0 0 0	2 ⁰

所谓编码无非是确定各个码元无非是 0 还是 1，这就有了判断的方法，如判断 C₂ 是 1 还是 0，要看抽样值的绝对值是大于 128，还是小于 128，大于判 1，小于判 0，在此基础上判断 C₃，以此类推，就完成了整个编码过程。而量化误差，一般算的是译码器输出的量化误差等于抽

样值减去译码器输出电平。7/11 变换,就是把编码器输出的 7 位非线性幅度码变为 11 位线性码,只需把 7 位码中段落码和段内码对应的电平值转化为二进制即可,由于这些电平值都可以表示成 2 的整数次幂,很好转化。7/12 是指把译码器中的 7 位非线性幅度码变成 12 位线性码,这是由于为了减小量化误差,译码时人为地加了一个二分之一的量化间隔的缘故。对于抽样值位于第一、二大段的情况,量化间隔为 Δ ,译码时要加上量化间隔的一半,即 $2^{-1}\Delta$,这在 11 位线性码中无法表示,只能在 11 位码后面多加一位,11 位码的最后一位表示 2^0 ,多加的这一位表示 2^{-1} ,这就是 12 位的由来,由于从第三段开始量化间隔大于等于 2Δ ,译码时加量化间隔的一半都大于等于 $2^0\Delta$,故只有在第一、二段时,译码时对应的第 12 位线性码是 1,其余情况下都为 0。这类题的解题思路都是一样的。

解: (1)

$$\begin{array}{ll} 635\Delta > 0 & c1=1 \\ 635\Delta > 128\Delta & c2=1 \\ 635\Delta > 512\Delta & c3=1 \\ 635\Delta < 1024\Delta & c4=0 \end{array}$$

段落码为 110,故该抽样值位于第七段,段落起始电平为 512Δ ,量化间隔为 32Δ 。

$$\begin{array}{ll} 635\Delta < 512\Delta + 23 \times 32\Delta = 768\Delta & c5=0 \\ 635\Delta < 512\Delta + 22 \times 32\Delta = 640\Delta & c6=0 \\ 635\Delta > 512\Delta + 21 \times 32\Delta = 576\Delta & c7=1 \\ 635\Delta > 512\Delta + 21 \times 32\Delta + 20 \times 32\Delta = 608\Delta & c8=1 \end{array}$$

所以,传输码组为: 11100011,编码器输出电平为 608Δ

$$(2) \quad \text{译码器输出电平} = 608 + 0.5 \times 32 = 624\Delta$$

$$\text{量化误差} = 635\Delta - 624\Delta = -11\Delta$$

(3)7/11 转换

$$608 = 512 + 2^1 \times 32 + 2^0 \times 32 = 2^9 + 2^6 + 2^5$$

所以,均匀量化 11 位码为: 01001100000

评注: (1) 本题直接告诉了抽样值是多少量化单位,要清楚这些抽样时怎么来的。A 率 13 折线把信号的动态范围均匀分成 4096 份,即有 4096 个量化单位,因此,用输入的电压值除以动态范围的长度后,再乘以 4096 即可,再利用上述方法即可编出码字,继而求出译码器输出量化误差,完成 7/12 变换。需要注意的是,量化误差若没指定一般都是译码器输出的量化误差,该误差对计算信号量噪比才具有实际的意义。

(2) 该题编码部分还有简化做法,在碰到填空题和选择题时可以这么做,大题由于是按步

给分，不要用简化方法。利用所给抽样值绝对值与段落起始电平比较可确定段落码，从而确定其对应的段落起始电平和段内量化间隔，然后再看抽样值的绝对值落在段内的哪一位置，再编成 4 位段内码即可。故求解过程如下：由于 $635\Delta > 0$ ，故 $C_1=1$ ， $512 < 635 < 1024$ ，故位于第七大段，段落码为 $C_2C_3C_4=110$ ，段落起始电平 512Δ ，量化间隔 32Δ ，故段内码为

$$\left[\frac{635-512}{32} \right] = 3 \text{ 余 } 27$$

故段内码 $C_5C_6C_7C_8 = 0011$ ，所编码组为 01100011。编码器输出量化误差 27Δ 。

13. 分析：首先要明确 PCM 输出的信号是二进制基带信号，其在基带信道中传输所需要的奈奎斯特带宽满足第六章所学的无码间干扰条件，奈奎斯特或等效奈奎斯特带宽只与传码率有关，与占空比没有任何关系，和占空比有关的是 PCM 信号的第一零点带宽，等于码元宽度内有电脉冲持续的时间的倒数，占空比越小，第一零点带宽越大。该题属于时分复用，即在一个采样周期 $1/8000 = 125$ 微秒内，要对 $l = 10$ 路信号各采一个样值，由于是 8 级量化，故每个样值编 $N = 3$ 位码。故传码率 $R_B = f_s l N$

解：8 级量化

$$8 = 2^N$$

故 $N = 3$ ，每个抽样值编 3 位码。

10 路信号复用后 PCM 信号的传码率

$$R_B = f_s l N = 8000 \times 10 \times 3 = 240 \text{ K (波特)}$$

故传输此 PCM 信号所需的奈奎斯特带宽为

$$f_N = R_B / 2 = 120 \text{ K (Hz)}$$

评注：(1) PCM 信号是二进制基带信号，等概下，传信率数值上等于传码率。(2) 奈奎斯特带宽只与传码率有关，与占空比无关。

16. 分析：PCM 系统的可靠性是由总的输出信噪比来衡量。噪声分成两类，一类是抽样、量化、编码时的量化噪声，可用编码位数 N 来衡量 $(S_0/N_q)_{dB} = 20 \lg M = 6N (dB)$ ，即 $S_0/N_q = M^2 = 2^{2N}$ ， $M = 2^N$ 为量化电平数，动态范围除量化电平数即为量化间隔。另

一类是传输过程中引入的加性高斯白噪声，其影响可以用误码率 P_e 来衡量。因此，总输出信噪比

$$\frac{S_0}{N_0} = \frac{S_0}{N_q + N_e} = \frac{2^{2N}}{1 + 4P_e 2^{2N}}$$

PCM 输出的信号是二进制基带信号，其传码率和传信率在数值上相等。该题只要求 $S_0/N_q = M^2 = 2^{2N}$ 部分。PCM 输出的信号是二进制基带信号，其传码率和传信率在数值上相等。在基带信道上传输时，所需奈奎斯特带宽即为传码率的一半。

$$\text{解：} \left(S_0/N_q \right)_{dB} = 10 \lg M^2 = 10 \lg 2^{2N} = 6N \geq 30$$

故编码位数

$$N \geq 5$$

最小编码位数 $N = 5$ ，此时传码率

$$R_B = f_s N = 2 f_m N = 6800 \times 5 = 34K \text{ baud}$$

故此 PCM 系统所需的奈奎斯特带宽

$$f_N = R_B/2 = 17K \text{ (Hz)}$$

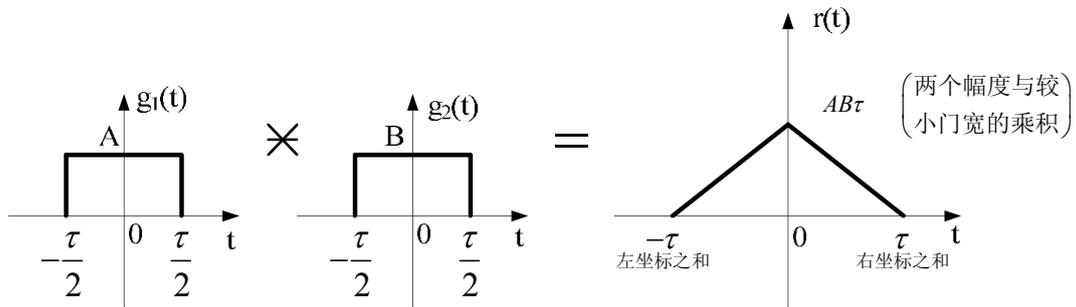
评注：PCM 和 ΔM 等模拟信号数字化技术出来的信号都是二进制数字基带信号，其无码间干扰传输所需要的等效奈奎斯特带宽即为其传码率的一半，满足奈奎斯特第一准则。

第十章 数字信号的最佳接收

1. 分析：确知信号、随相信号和起伏信号是通信系统中处理的三类主要信号。所谓确知信号是指其取值在任何时间都是确定的，可以预知的信号。在二进制数字通信系统中，发送端所发送的“1”和“0”码的波形是确知的，对于接收端来说，这两种波形也是确知的。不确定的是什么时候发“1”或“0”码。因此，发送信号经过理想恒参信道后，接收端在任一码元宽度内所接收到信号是确知的。随相信号是指确知信号在传输过程中，传输时延随机变化导致接收码元的相位随机变化的随机信号，即相位带有随机性的信号。起伏信号是指确知信号在传输过程中，包络受到的衰减是随机变化的，时延也是随机变化的，这样的信号称之为起伏信号，确知信号经过第四章所学的随参信道后，到达接收端的信号就是随相信号。

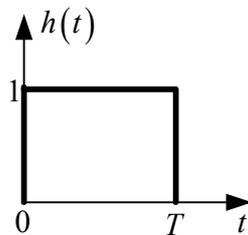
解：确知信号是指其取值在任何时间都是确定的，可以预知的信号；随相信号是相位带有随机性的信号；起伏信号是指包络和相位都做随机变化的信号。

2. 分析：由于我们所用的二进制信号要么是不归零的矩形脉冲，要么是归零的矩形脉冲，因此，与其对应的匹配滤波器波形中的脉冲宽度是一样的，因此，可利用下述规律求解。

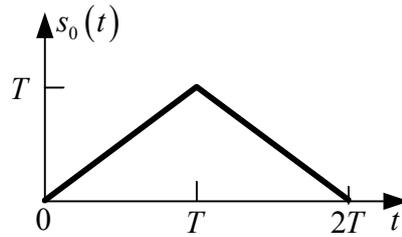


可以先画出波形，再写数学表达式，就是简单的直线方程的问题了。

解： $h(t) = s(T-t)$



$$s_0(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau = \begin{cases} t, & 0 \leq t < T \\ 2T-t, & T < t \leq 2T \end{cases}$$



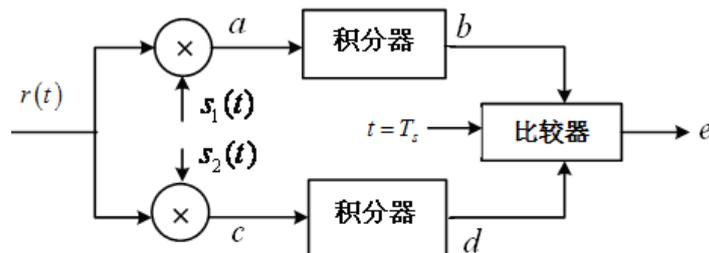
评注：从匹配滤波器输出波形可以看出，最大判决时刻 $t_0 = T$ 。此时最大输出信噪比 $r_{0\max} = 2E_b/n_0$ ，其中 E_b 是指接收信号（包括“1”和“0”码）的平均能量，如果是双极性信号，“1”和“0”码的能量相等，故平均能量就等于其各自的能量，对于单极性信号，等概时，平均能量为“1”码能量的一半。 n_0 是指信道噪声的单边带功率谱密度。

4. 分析：2FSK 有两个载波，故与其对应的最佳接收机有上下两条支路，画波形时按流程画即可，但要注意经过积分器判决时，在最佳判决时刻要有一个清零脉冲，将最大值变为 0，以便于下一个码元的判决。一般，2FSK 的两种接收信号之间正交，故相关系数 $\rho = 0$ 。

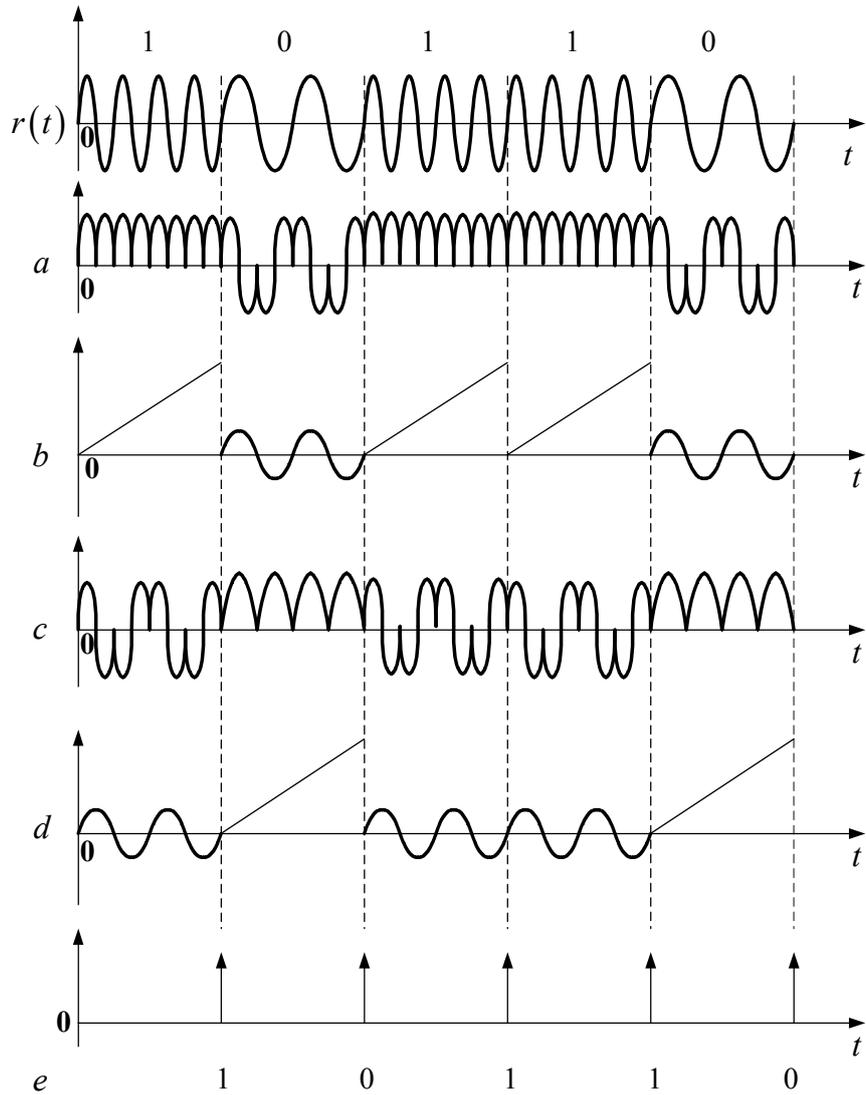
解：（1）在任一码元宽度内，接收到的 2FSK 信号的表达式为

$$r(t) = \begin{cases} A \cos 2\pi f_0 t = s_1(t) & \text{发送“0”时} \\ A \cos 2\pi f_1 t = s_2(t) & \text{发送“1”时} \end{cases}$$

$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 等概出现时，相关器形式的最佳接收机结构为：



由 $f_0 = 2/T_s$ ， $f_1 = 2f_0$ ，一个码元宽度内有 2 个 f_0 载波，4 个 f_1 载波。各工作点波形如下。



要注意，相乘后在各个码元宽度内均可以表示成一个矩形和对应的积分结果相乘，对矩形积分就是一条斜线，实际波形是在斜线的基础上叠加一个幅度很小高频正弦波，这可以根据积分结果得到，由于幅度很小，可以忽略，我们可以用这条斜线近似表示积分结果，在每个码元结束时刻，有一个清零脉冲将电平值归成 0 电平，以便于对下一码元进行接收。

(2) 接收信号平均能量

$$E_b = A^2 T / 2$$

相关系数

$$\rho = \frac{\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt}{\sqrt{E_1 E_2}} = \frac{\int_0^T A \sin \omega_1 t \cdot A \sin \omega_2 t dt}{E_b} = 0$$

误码率

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{2n_0}(1-\rho)} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{A^2 T}{4n_0}}$$

评注：画图其实很简单，按流程即可，注意到，积分是在一个码元宽度内进行的，对于和接收信号相关的支路，在一个码元内对矩形和载波相乘的积分的结果肯定是一条斜线，实际波形是在斜线的基础上叠加一个幅度很小高频正弦波，这可以根据积分结果得到，由于幅度很小，可以忽略，我们可以用这条斜线近似表示积分结果；对于非相关的支路，注意到在一个周期内的积分结果是先到最大或最小值，最终都归于 0，判决规则是谁大判谁。

5. 分析：对于最佳接收系统，追求的是在无码间干扰的前提下达到最小的差错概率，所以对于频带传输系统而言，可以这样实现：先让 M 进制数字基带信号通过部分响应系统，实现部分响应波形，这样在基带可以实现 2 波特/赫兹的最高频带利用率。在频带系统，部分响应系统实现了调制前发送滤波器的作用，此时，发送信号的带宽就是部分响应滤波器的带宽，为传码率的一半，然后进行载波调制，变成 MPSK、MASK 或 MQAM 信号，这些信号都是双边带信号，故带宽加倍等于传码率，最大频带利用率变成 1 波特/赫兹，这和第七章第 20 题的结论是一样的。因此，接收端所需要相关的是发送滤波器输出波形和载波相乘的结果，而对应匹配滤波器要匹配的也是这个结果，实现最佳接收。而在最佳基带传输系统，接收滤波器就是匹配滤波器，和谁匹配，和发送滤波器输出的信号相匹配，二者和信道共同构成一个无码间干扰传输系统，并能满足抽样时刻匹配滤波器输出信噪比最大，即拥有最小的误码率，最佳的抗高斯白噪声性能，但和频带系统不同的是，基带系统的最小带宽即奈奎斯特带宽为传码率的一半。该题所给的已知条件是接收机输入信噪比 E_b/n_0 ，即接收信号平均能量和信道噪声的单边带功率谱密度之比。对于 2PSK 信号而言，应该等于接收信号平均功率乘以码元宽度。这里拓展一下，由于 2PSK 一般接收机是以调制信号第一零点带宽的 2 倍作为带宽的，而最佳接收机是发送滤波器带宽的 2 倍，即传码率作为传输带宽的。这些带宽都不是已调信号本身的实际带宽，都要比已调信号的实际带宽小，因此，已调信号波形都发生了展宽的。接收端在计算接收信号平均功率时，采用了类似等效带宽的概念，将接收信号波形的宽度进行等效，等效成什么？等效成宽度为码元宽度的恒包络信号，等效的前提仍旧是接收信号平均功率不变。所以该题的条件可以理解为：在最佳接收机和一般接收机输入信号平均能量和信道噪声单边带功率谱密度相同的前提下，比较二者的抗噪声性能。由于最佳接收机发送端采用了部分响应波形，因此，发送信号的带宽是有限的，其功率谱密度的带宽因此也是有限的，这有限的带宽包含了发送信号的全部能量。而一般接收机的第一零点带

宽只包含了信号 90%以上的能量，为了更好的接收信号，实际传输信号的带宽要能包含尽可能多的信号能量，因此，带宽要大于第一零点带宽，本题取了第一零点带宽的3倍，即 $6/T_s$ 。

解：

$$10 \lg \frac{E_b}{n_0} = 10$$

$$\frac{E_b}{n_0} = 10$$

由于 2PSK 最佳接收机各接收信号的平均能量都相等，是双极性基带信号对载波进行调制得到的，所以，接收信号的取值正好相反，其相关系数 $\rho = -1$ 。因此，2PSK 最佳接收机的误码率为

$$\begin{aligned} P_{e1} &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{2n_0} (1-\rho)} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{n_0}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{10} = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{10}) \approx \frac{1}{2} (1 - 0.99999) = 5 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

2PSK 一般接收机的输入信噪比

$$r = \frac{S_i}{n_0 B} = \frac{S_i}{6n_0/T_s} = \frac{S_i T_s}{6n_0} = \frac{E_b}{6n_0} = \frac{5}{3}$$

其误码率为

$$\begin{aligned} P_{e2} &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{r} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{erf}(1.29)] = \frac{1}{2} [1 - 0.93190] = 3.4 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\frac{P_{e2}}{P_{e1}} = \frac{3.4 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-6}} = 6800$$

因此，在相同输入信号平均能量和信道噪声单边带功率谱密度相同的前提下，最佳接收机的抗噪声性能要远远优于一般接收机。

评注：影响接收机性能的两个主要因素是接收信号的平均能量和噪声的平均功率，要在使接收信号能量最大化的同时降低噪声的平均功率，对于一般接收机而言，实际带宽的选择要合适。

6. 分析：最佳基带传输系统误码率是在无码间干扰，只有信道加性高斯白噪声的条件下的

最小误码率。因此，其最大传码率只与信道的等效奈奎斯特带宽有关，而信道带宽决定接收端的噪声的平均功率，从而和接收信号能量一起决定了误码率。本题已告诉码元宽度，因此，为了节省传输带宽，减小接收端的噪声功率，基带系统的最高传输速率最好等于所传信号的码元速率，因此，只需把 T_s 计算出来即可，根据已知条件，信号码元的持续时间为 T_s ，幅度为 1，因此，信号的平均能量 $E = T_s$ ，而 E 通过误码率即可计算出来，问题到此解决，要注意误码率公式里用到的是噪声单边带功率谱密度。

解：

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E}{n_0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{E}{n_0}} \right) \leq 10^{-5}$$

$$\operatorname{erf} \sqrt{\frac{E}{n_0}} \geq 0.99998$$

$$\sqrt{\frac{E}{n_0}} \geq 3$$

$$\frac{E}{n_0} \geq 9$$

因此，

$$E \geq 9n_0 = 9 \times 2 \times \frac{n_0}{2} = 9 \times 2 \times 10^{-4} = 18 \times 10^{-4} \text{ (焦耳)}$$

$$E = \int_0^{T_s} s^2(t) dt = \int_0^{T_s} dt = T_s$$

最小码元宽度

$$T_s = 18 \times 10^{-4} \text{ (秒)}$$

故系统的最大传码率

$$R_B = 1/T_s = 10000/18 \approx 555 \text{ (波特)}$$

评注：注意理解分析过程中最佳基带传输系统等效奈奎斯特带宽、无码间干扰的最大传码率、接收机输入信噪比、误码率、接收信号能量和码元宽度之间的关系。此题如果告诉系带系统的滚降系数，可设计成一道综合的设计题。

8. 分析：按积分的定义即可求出，需要注意的是积分是在一个码元宽度内进行的，接收端需要按抽样定理在一个码元宽度内对噪声进行等间隔抽样，当抽样间隔无限小时，积分就可以用求和符号表示，这里的关键是抽样间隔的确定。假定接收的是低通信号，接收滤波器或

接收端匹配滤波器的带宽为 f_H ，则最小采样速率 $f_s = 2f_H$ ，一个码元宽度内采样点数为 $k = T_s/2f_H$ ，采样间隔为 T_s/k 。

证明：在一个码元宽度内对噪声以采样速率 $f_s = 2f_H$ 进行那个采样，设采的样值用 $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ 表示，则这些样值点的平均功率为

$$P = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k n_i^2 = \frac{1}{2f_H T_s} \sum_{i=1}^k n_i^2 = \frac{1}{T_s} \sum_{i=1}^k n_i^2 \frac{1}{2f_H}$$

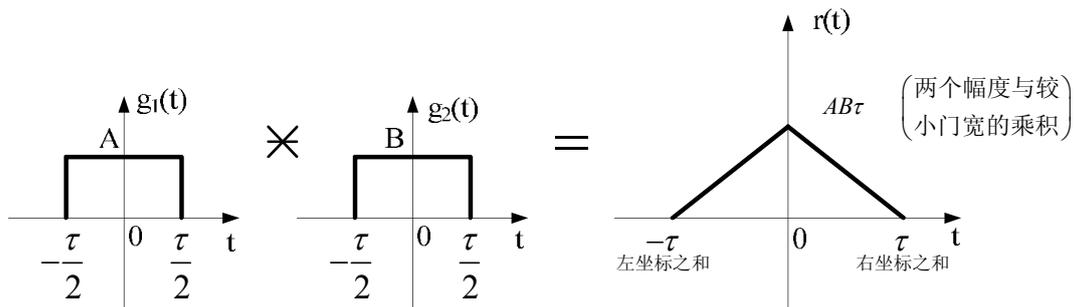
当 $k = T_s/2f_H \rightarrow \infty$ 时，

$$\sum_{i=1}^k n_i^2 \frac{1}{2f_H} \approx \int_0^{T_s} n^2(t) dt$$

故有

$$\frac{1}{2f_H T_s} \sum_{i=1}^k n_i^2 \approx \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} n^2(t) dt$$

9. 分析：对于匹配滤波器接收机而言，只要知道了接收信号，就可以画出匹配滤波器 $h(t) = s(T-t) = s[-(t-T)]$ ，即把 $s(t)$ 的波形先以纵轴为对称轴进行翻转，在向右平移码元宽度 T 即可。继而可以求出匹配滤波器的输出，并在输出最大值时刻进行判决，可以看到，这个时刻即为码元消失的时刻。对应着对大输出信噪比。计算最大输出信噪比时用到的能量是接收信号的平均能量。此外，还要用到本章第 2 题的规律：

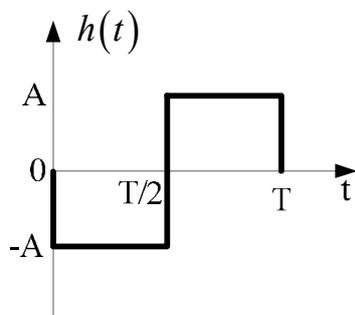


经观察可以看到，接收信号都可以看成是门宽相同的矩形的叠加，因此，可把接收信号和匹配滤波器分解成几个矩形，让这些矩形之间进行卷积，再相加即可，相加完以后，就可以写出各段的数学表达式了。具体做的时候，要在草稿纸上先画出图，写出数学表达式。做在作业本上的是先出数学表达式，后画图。

解：(1) 最佳判决时刻是码元消失的时刻或之后，故 $t_0 \geq T$ 。

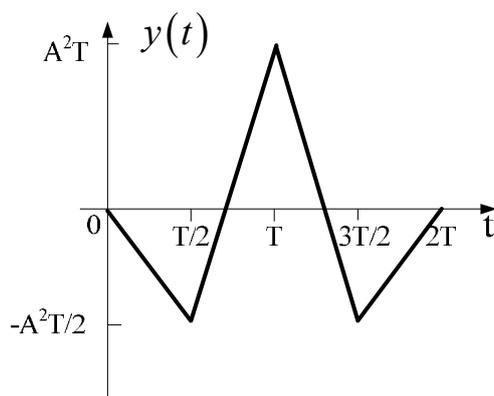
(2)

$$h(t) = f(T-t) = \begin{cases} -A, & 0 \leq t \leq T/2 \\ A, & T/2 < t \leq T \end{cases}$$



(3)

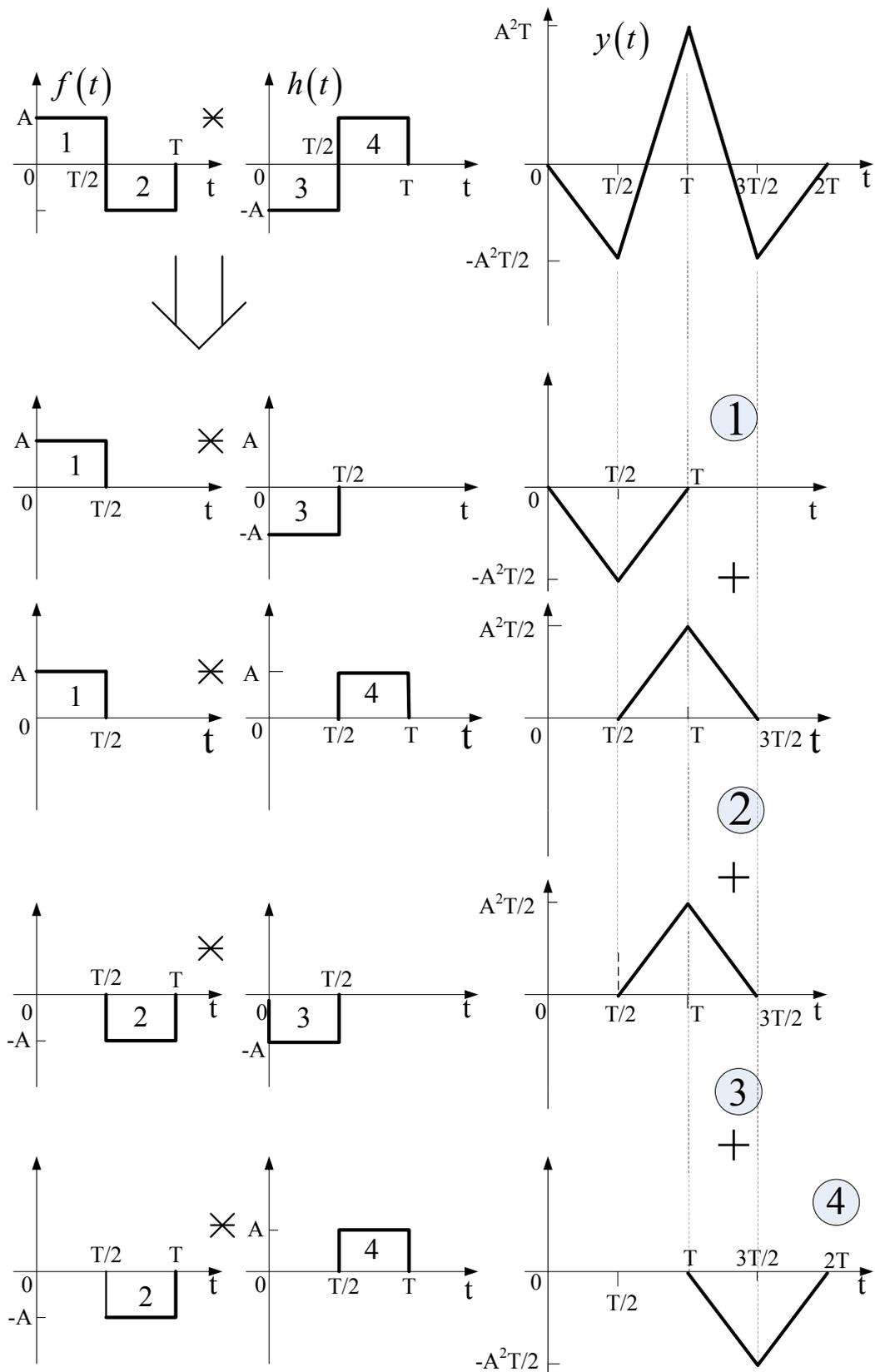
$$y(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = \begin{cases} -A^2 t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ A^2 (3t - 2T), & \frac{T}{2} < t \leq T \\ A^2 (4T - 3t), & T < t \leq \frac{3T}{2} \\ A^2 (t - 2T), & \frac{3T}{2} < t \leq 2T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



(4) 接收信号平均能量 $E = A^2 T$ 。

$$r_{o\max} = \frac{2E}{n_0} = \frac{2A^2 T}{n_0}$$

评注：求卷积过程



可以看到，最佳判决时刻的确是码元消失时刻。

第十一章 差错控制编码

1. 分析：码距是指两个码组对应位上数字不同的位数，又称之为汉明距离。最小码距指某种编码中各个码组之间距离的最小值。若是线性码，最小码距等于（非全零）码组的最小重量。首先判断所给码组是否为线性码。因为码组长度为 6，按照 $n \leq 2^r - 1$ 和 $n = k + r$ ，可以得到 $k = r = 3$ （若 $r = 4$ ，可以指出 15 种错码位置，则此时信息为只有 2 位，太浪费了，编码效率太低，不用）。因此，要判断所给的 8 个码组是否为 (6,3) 汉明码的许用码组。由于 $A = [a_5 a_4 a_3]G$ ， $G = [I_k Q]$ 。所以，由 $a_5 a_4 a_3 = \{100, 010, 001\}$ 生成的监督位分别表示 Q 矩阵的 3 行。因此，

$$Q = \begin{bmatrix} 011 \\ 101 \\ 110 \end{bmatrix}$$

故

$$G = \begin{bmatrix} 100011 \\ 010101 \\ 001110 \end{bmatrix}$$

将其余信息位代入

$$A = [a_5 a_4 a_3]G$$

对于 $a_5 a_4 a_3 = 011$ ，对应的监督位是 Q 矩阵第 2 行和第 3 行的模 2 加，的确为 011；对于 $a_5 a_4 a_3 = 101$ ，对应的监督位是 Q 矩阵第 1 行和第 3 行的模 2 加，的确为 101；对于 $a_5 a_4 a_3 = 110$ ，对应的监督位是 Q 矩阵第 1 行和第 2 行的模 2 加，的确为 110；对于 $a_5 a_4 a_3 = 111$ ，对应的监督位是 Q 矩阵各行的模 2 加，的确为 000。故所给码组的确为线性码，最小码距 $d_0 = 3$ 。

解：码距是指两个码组对应位上数字不同的位数，又称之为汉明距离。最小码距指某种编码中各个码组之间距离的最小值。若是线性码，最小码距等于（非全零）码组的最小重量。由于所给码组为线性码，码组的最小重量为 3，故最小码距 $d_0 = 3$ 。

2. 分析：码组的纠检错能力和码组之间的最小码距有关，遵循以下规律：若要求检测 e 个

错, 则 $d_0 \geq e+1$; 若要求纠正 t 个错, 则 $d_0 \geq 2t+1$; 若要检测 e 纠正 t 个错 (同时), 则 $d_0 \geq e+t+1$ 且 $e > t$ 。

解: 最小码距 $d_0 = 3$, 若用于检错, 因为 $d_0 = 2+1$, 故能检测出 2 个错码; 若用于检错, 因为 $d_0 = 2 \times 1+1$, 故能纠正 1 个错码; 若同时用于纠检错, 因为 $d_0 = 1+1+1$, 故不能同时纠检错。

3. 分析: 码组的纠检错能力和码组之间的最小码距有关, 遵循以下规律: 若要求检测 e 个错, 则 $d_0 \geq e+1$; 若要求纠正 t 个错, 则 $d_0 \geq 2t+1$; 若要检测 e 纠正 t 个错 (同时), 则 $d_0 \geq e+t+1$ 且 $e > t$ 。

解: “0000” 和 “1111” 的最小码距 $d_0 = 4$, 若用于检错, 因为 $d_0 = 3+1$, 故能检测出 3 个错码; 若用于检错, 因为 $d_0 > 2 \times 1+1$, 故能纠正 1 个错码; 若同时用于纠检错, 因为 $d_0 = 2+1+1$, 故能检测出 2 个错码的同时纠 1 位错码。

4. 分析: 奇偶校验码都是只能检测出奇数个错码的差错控制编码方式。二维奇偶校验码的原理为奇偶监督码的若干码组排成矩阵, 每一码组写成一列, 然后再按列的方向增加第二维监督位。

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{n-1}^1 & a_{n-2}^1 & \cdots & a_1^1 & a_0^1 & & \\
 a_{n-1}^2 & a_{n-2}^2 & \cdots & a_1^2 & a_0^2 & & \\
 \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \\
 a_{n-1}^m & a_{n-2}^m & \cdots & a_1^m & a_0^m & & \\
 c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 & c_0 & &
 \end{array}$$

其中, $a_0^1 a_0^2 \cdots a_0^m$ 为 m 行奇偶监督码中的 m 个监督位, $c_{n-1} c_{n-2} \cdots c_0$ 为按列进行第二次编码所增加的监督位。故有可能检测偶数个错码。因为每行的监督位虽然不能用于检测本行中的偶数个错码, 按列的方向有可能由 $c_{n-1} c_{n-2} \cdots c_0$ 等监督位检测出来。但构成矩形的 4 个错码从行和列都检不出来。该题中的错码无论从行看还是从列看, 都有两个错码, 因此, 无法检测。

5. 分析: 汉明码是指能纠正 1 位错码的线性分组码。码组长度 n 和信息位长度 k 及监督位长度 r 之间要满足 $n \leq 2^r - 1$ 和 $n = k + r$, 一般要求 r 越小越好, 因为这样编码效率较高。

由于 $n = 11$, $2^r \geq 12$, r 最小取 4。因此, $k = 11$ 。由于是 15 位码, 4 个监督位可以指出 15 个错码位置, 可由此指定具体的监督关系, 这种监督关系不是固定的, 只要能指出 15 个错码位置就可以了。因此, 有 4 个监督关系式, 对应 4 个校正子。校正子不为 0 的码与所对应的错码位置有关, 因此, 可写出监督关系式。

解: 汉明码是指能纠正 1 位错码的线性分组码。由其码组长度 n 和信息位长度 k 及监督位长度 r 的关系

$$\begin{cases} n = k + r \\ n \leq 2^r - 1 \end{cases}$$

由于 $n = 15$, $2^r \geq 16$, $r \geq 4$ 。一般要求 r 越小越好, 因为这样编码效率较高, 故 $r = 4$ 。
编码效率

$$\eta = \frac{15-4}{15} = \frac{11}{15}$$

因为监督位有 4 位, 故对应 4 个校正子 S_1 、 S_2 、 S_3 和 S_4 , 假设校正子与错码的对应关系如下表所示 (注: 这只是其中的一种可能, 实际对应关系有多种可能, 只要能指出 15 个错码位置就可以了)。

$S_1S_2S_3S_4$	错码位置	$S_1S_2S_3S_4$	错码位置
0001	a_0	1001	a_8
0010	a_1	1010	a_9
0011	a_2	1011	a_{10}
0100	a_3	1100	a_{11}
0101	a_4	1101	a_{12}
0110	a_5	1110	a_{13}
0111	a_6	1111	a_{14}
1000	a_7	0000	无错码

根据 S_1 、 S_2 、 S_3 和 S_4 的取值与错误位置的对应关系, 可以写出监督关系。

$$\begin{cases} S_1 = a_3 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ S_2 = a_2 + a_5 + a_6 + a_7 + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ S_3 = a_1 + a_4 + a_6 + a_7 + a_9 + a_{10} + a_{13} + a_{14} \\ S_4 = a_0 + a_4 + a_5 + a_7 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} \end{cases}$$

令 $S_1S_2S_3S_4 = 0000$ ，可得信息码元与监督码元之间的关系为

$$\begin{cases} a_3 = a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_2 = a_5 + a_6 + a_7 + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \\ a_1 = a_4 + a_6 + a_7 + a_9 + a_{10} + a_{13} + a_{14} \\ a_0 = a_4 + a_5 + a_7 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} \end{cases}$$

评注：(1) 监督关系式中的加号代表模 2 加，即同号加为 0，异号加为 1。(2) 监督关系不是唯一的，由于校正子与错码的对应关系有许多种，只要能指出 15 个错码位置就可以了。所以，最终得到的信息码元与监督码元之间的关系、生成矩阵和监督矩阵和最后的许用码组都不是唯一的。(3) 写监督关系式时，校正子不为 0，说明，该位校正子可以监督其所对应的错码位置。

6. 分析：对于线性分组码 (n, k) ，要注意信息位 k 决定了信息位长度， $r = n - k$ ，由于典型监督阵 $H = [PI_r]$ ，为 $r \times n$ 矩阵，故其行数代表了监督位的位数，该题 $r = 3$ ，列数代表了码组长度， $n = 7$ 。故信息码长度为 4，共有 16 个，0000 到 1111，许用码组 $A = [a_7a_6a_5a_4]G$ ，先相乘再模 2 加，要注意的是 G 要化成典型阵，即 $G = [I_kQ]$ ，除全 0 码组，线性分组码是线性码，其码组除全零码外，码组的最小码重即为最小码距，也为校正子的个数，即监督位的个数。

解：有所给监督矩阵可知 $n = 7$ ， $r = 3$ ，故 $k = n - r = 4$ ，所给监督矩阵是典型阵，可以写为 $H = [PI_r]$ ，因此，可得到矩阵。

$$P = \begin{bmatrix} 1110 \\ 1101 \\ 1011 \end{bmatrix}$$

$$Q = P^T = \begin{bmatrix} 111 \\ 110 \\ 101 \\ 011 \end{bmatrix}$$

所以，

$$G = [I_k Q] = \begin{bmatrix} 1000111 \\ 0100110 \\ 0010101 \\ 0001011 \end{bmatrix}$$

将信息位 0000 到 1111 代入

$$A = [a_7 a_6 a_5 a_4] G$$

可得许用码组

0000000	0100110	1000111	1100001
0001011	0101101	1001100	1101010
0010101	0110011	1010010	1110100
0011110	0111000	1011001	1111111

评注：计算许用码组时不必带进求许用码组公式一个一个计算，只需将与信息码中不为 0 的列对应的 Q 矩阵的行模 2 加即可。譬如信息码 0110，只需将 Q 矩阵的第 2 和第 3 行模 2 加即可得到监督位 011，其余是类似的。

7. 分析：对于线性分组码 (n, k) ，要注意信息位 k 决定了信息位长度， $r = n - k$ ，由于典型生成阵 $G = [I_k Q]$ ，为 $k \times n$ 矩阵，故其行数代表了信息位的位数，该题 $k = 3$ ，列数代表了码组长度， $n = 6$ 。故信息码共有 8 个，000 到 111，许用码组 $A = [a_6 a_5 a_4] G$ ，先相乘再模 2 加，要注意的是 G 要化成典型阵，即 $G = [I_k Q]$ ，除全 0 码组，线性分组码是线性码，其码组除全零码外，码组的最小码重即为最小码距，也为校验子的个数，即监督位的个数。

解：(1) $r = n - k = 4$

$$A = [a_6 a_5 a_4] G = [a_6 a_5 a_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将 $a_6 a_5 a_4 = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$ 分别代入，可得所有许用码组：

0000000	0011101	0100111	0111010
1001110	1010011	1101001	1110100

(2)

$$G = [I_k Q], \quad Q = \begin{bmatrix} 1110 \\ 0111 \\ 1101 \end{bmatrix}, \quad P = Q^T = \begin{bmatrix} 101 \\ 111 \\ 110 \\ 011 \end{bmatrix}$$
$$H = [PI_r] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

评注：计算许用码组时不必带进求许用码组公式一个一个计算，只需将与信息码中不为 0 的列对应的 Q 矩阵的行模 2 加即可。譬如信息码 011，只需将 Q 矩阵的第 2 和第 3 行模 2 加即可得到监督位 1010，其余是类似的。

8. 分析：生成多项式对应一个许用码，该许用码组满足生成多项式的条件，即最高次幂是 $n-k$ ，常数项不为 0，许用码组中只有这一个生成多项式。在 (n, k) 循环码中，生成多项式和生成矩阵的关系是

$$G(x) = \begin{bmatrix} x^{k-1}g(x) \\ x^{k-2}g(x) \\ \vdots \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$$

且生成矩阵的每一行都是循环码的一个许用码组，而生成多项式也对应着循环码的一个许用码组，这个码组是唯一的，满足最高次幂为 $n-k$ ，且常数项为 1，也可以从已知的生成矩阵 G 中按此要求直接找到。

解：

$$r = n - k = 7 - 4 = 3$$

生成多项式对应着循环码的一个许用码组，该许用码组满足最高次幂为 $n-k$ ，且常数项为 1，因此，只有 0001011 满足，故生成多项式为

$$g(x) = x^3 + x + 1$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} x^{k-1}g(x) \\ \vdots \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3g(x) \\ x^2g(x) \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^6 + x^4 + x^3 \\ x^5 + x^3 + x^2 \\ x^4 + x^2 + x \\ x^3 + x + 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1011000 \\ 0101100 \\ 0010110 \\ 0001011 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{第4行加到第2行} \\ = \\ \text{第4, 3行加到第1行} \end{array} \begin{bmatrix} 1000101 \\ 0100111 \\ 0010110 \\ 0001011 \end{bmatrix} = [I_k Q]$$

9. 解：根据第 8 题的典型生成矩阵，得到

$$Q = \begin{bmatrix} 101 \\ 111 \\ 110 \\ 011 \end{bmatrix}, \quad P = Q^T = \begin{bmatrix} 1110 \\ 0111 \\ 1101 \end{bmatrix}$$

故典型监督阵

$$H = [PI_r] = \begin{bmatrix} 1110100 \\ 0111010 \\ 1101001 \end{bmatrix}$$

10. 分析：方法和第 8 题一样。

解：

$$G(x) = \begin{bmatrix} x^{k-1}g(x) \\ \vdots \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{10}g(x) \\ \vdots \\ x^2g(x) \\ xg(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{14} + x^{13} + x^{10} \\ x^{13} + x^{12} + x^9 \\ x^{12} + x^{11} + x^8 \\ x^{11} + x^{10} + x^7 \\ x^{10} + x^9 + x^6 \\ x^9 + x^8 + x^5 \\ x^8 + x^7 + x^4 \\ x^7 + x^6 + x^3 \\ x^6 + x^5 + x^2 \\ x^5 + x^4 + x \\ x^4 + x^3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 11001000000000 \\ 01100100000000 \\ 00110010000000 \\ 00011001000000 \\ 00001100100000 \\ 00000110010000 \\ 00000011001000 \\ 00000001100100 \\ 00000000110010 \\ 00000000011001 \\ 000000000011001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100011111110111 \\ 010001111110111 \\ 001000111110111 \\ 000100011110111 \\ 000010001110111 \\ 000001000110111 \\ 000000100010111 \\ 000000010000111 \\ 000000001000111 \\ 000000000101011 \\ 000000000011001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100000000001100 \\ 010000000000110 \\ 001000000000011 \\ 0001000000001101 \\ 0000100000001010 \\ 000001000000101 \\ 000000100001110 \\ 0000000100001110 \\ 0000000010000111 \\ 0000000001001111 \\ 0000000000101011 \\ 0000000000011001 \end{bmatrix} = [I_k Q]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1100 \\ 0110 \\ 0011 \\ 1101 \\ 1010 \\ 0101 \\ 1110 \\ 0111 \\ 1111 \\ 1011 \\ 1001 \end{bmatrix} \quad P = Q^T = \begin{bmatrix} 10011010111 \\ 11010111100 \\ 01101011110 \\ 00110101111 \end{bmatrix}$$

监督矩阵

$$H = [PI_r] = \begin{bmatrix} 100110101111000 \\ 110101111000100 \\ 011010111100010 \\ 001101011110001 \end{bmatrix}$$

12. 分析：将监督方程写成行列式相乘的形式，则系数矩阵就是监督矩阵，将系数矩阵化为典型阵即可写出典型生成阵。

解：

$$\begin{aligned} x_6 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_1 &= 0 \\ x_5 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_0 &= 0 \\ x_6 \oplus x_5 \oplus x_1 &= 0 \\ x_5 \oplus x_4 \oplus x_0 &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
0 \cdot x_7 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_0 &= 0 \\
0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_0 &= 0 \\
0 \cdot x_7 + 1 \cdot x_6 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_0 &= 0 \\
0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_5 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_0 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1001110 \\ 0100111 \\ 1100010 \\ 0110001 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = HA^T = 0$$

故

$$H = \begin{bmatrix} 1001110 \\ 0100111 \\ 1100010 \\ 0110001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1011000 \\ 1110100 \\ 1100010 \\ 0110001 \end{bmatrix} = [PI_r]$$

$$P = \begin{bmatrix} 101 \\ 111 \\ 110 \\ 011 \end{bmatrix} \quad Q = P^T = \begin{bmatrix} 1110 \\ 0111 \\ 1101 \end{bmatrix}$$

故生成矩阵

$$G = [I_k Q] = \begin{bmatrix} 1001110 \\ 0100111 \\ 0011101 \end{bmatrix}$$

14. 分析：循环码中，任一正确的许用码组都可以被生成多项式整除，因此，判断接收码组是否正确的一种方法就是看能否被生成多项式整除，整除的话，没错，否则，有错。

解：

$$\frac{T(x)}{g(x)} = \frac{x^{14} + x^5 + x + 1}{x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1}$$

$$\begin{array}{r}
 x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 \quad \sqrt{\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^3 \\ x^{14} + x^5 + x + 1 \\ x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^6 \end{array}} \\
 \hline
 \begin{array}{r} x^{13} + x^{12} + x^{10} + x^6 + x^5 + x + 1 \\ x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^5 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{r} x^{11} + x^{10} + x^9 + x^6 + x + 1 \\ x^{11} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^3 \end{array} \\
 \hline
 x^7 + x^6 + x^3 + x + 1
 \end{array}$$

故余式

$$r(x) = x^7 + x^6 + x^3 + x + 1 \neq 0$$

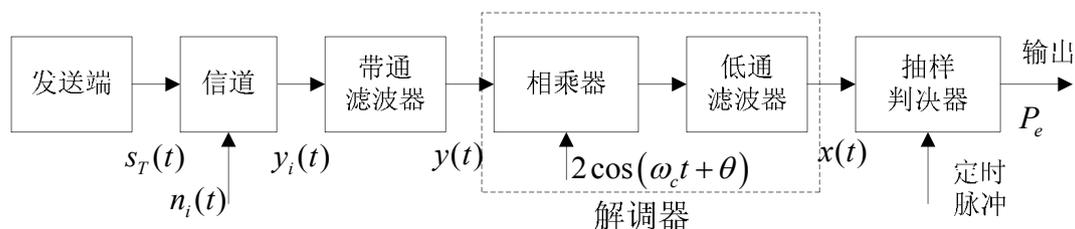
因此，接收码组中有错误。

评注：判断接收码组是否有错的方法有两种，第一种就是用接收码组的码多项式除以生成多项式，看能不能被生成多项式整除，能的话，说明没错码，否则，有错码。第二种方法，可以用校正子来判断，看 HA^T 是否为 0，若为 0，说明没错，否则，传错了，到底哪一位传错了，就要看校正子和典型监督阵的哪一列对应，就是相应位上的码元传错了。

第十三章 同步原理

1. 分析：在数字通信系统中，为正确解调，要求解调器的本地载波和接收信号中的载波保持同频同相，但由于信号经过远距离传输，受信道特性的影响，其频率或相位已经发生了偏离，虽然接收端知道发送端所用载波的频率，但并不知道接收到的信号中载波的频率和相位发生了什么变化，这就是载波同步的出发点和目的。当本地载波已经保持了同频但相位有偏差时，通过相干解调，可以观察到相位偏移对解调信号的影响，反映在抽样判决器的判决时刻信号的取值上，因此，影响抽样判决器抽样判决时刻输入波形的一维概率密度均值，从而影响最终的误码率。而相位偏移不影响噪声的平均功率。

解：由 $10 \lg r = 10$ 得到 $r = 10$



设 $y(t) = \begin{cases} a \cos(\omega_c t + \varphi), & \text{发送“1”时} \\ -a \cos(\omega_c t + \varphi), & \text{发送“0”时} \end{cases}$ ，本地载波为 $c(t) = 2 \cos(\omega_c t + \theta)$ ，则发“1”

时，

$$y(t) \cdot c(t) = a \cos(\omega_c t + \varphi) \times 2 \cos(\omega_c t + \theta) = a [\cos(2\omega_c t + \varphi + \theta) + \cos(\varphi - \theta)]$$

发“0”时，

$$y(t) \cdot c(t) = -a \cos(\omega_c t + \varphi) \times 2 \cos(\omega_c t + \theta) = -a [\cos(2\omega_c t + \varphi + \theta) + \cos(\varphi - \theta)]$$

经过低通滤波器后，抽样判决器输入信号为

$$x(t) = \begin{cases} a \cos(\varphi - \theta), & \text{发“1”时} \\ -a \cos(\varphi - \theta), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

对于噪声，解调器输入噪声

$$n(t) = n_c(t) \cos(\omega_c t + \varphi) - n_s(t) \sin(\omega_c t + \varphi)$$

$$\begin{aligned} n(t)c(t) &= [n_c(t) \cos(\omega_c t + \varphi) - n_s(t) \sin(\omega_c t + \varphi)] 2 \cos(\omega_c t + \theta) \\ &= n_c(t) [\cos(2\omega_c t + \varphi + \theta) + \cos(\varphi - \theta)] - n_s(t) [\sin(2\omega_c t + \varphi + \theta) + \sin(\varphi - \theta)] \end{aligned}$$

经过低通滤波器后，抽样判决器输入噪声为

$$n_c(t)\cos(\varphi-\theta)-n_s(t)\sin(\varphi-\theta)$$

故抽样判决器输入波形为

$$r(t)=\begin{cases} a\cos(\varphi-\theta)+n_c(t)\cos(\varphi-\theta)-n_s(t)\sin(\varphi-\theta), & \text{发“1”时} \\ -a\cos(\varphi-\theta)+n_c(t)\cos(\varphi-\theta)-n_s(t)\sin(\varphi-\theta), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

因此，抽样判决器输入噪声的平均功率为

$$\overline{n_c^2(t)}+\overline{n_s^2(t)}=\sigma_n^2[\cos^2(\varphi-\theta)+\sin^2(\varphi-\theta)]=\sigma_n^2$$

因此，等概时，

$$P_e=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\sqrt{\frac{a^2\cos^2(\varphi-\theta)}{2\sigma_n^2}}$$

即判决器输入信噪比下降至 $\cos^2(\varphi-\theta)$ 倍。

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left[\sqrt{r}\cos(\varphi-\theta)\right]=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left[\sqrt{10}\cos 10^\circ\right]=\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left[3.1622\times 0.9848\right] \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{erfc}(3.11)\approx\frac{1}{2}(1-0.99999)=5\times 10^{-6} \end{aligned}$$

评注：（1）当本地载波与接收信号中的载波不同相时，计算数字频带通信系统误码率时，就不能带解调器输入端的信噪比了，因为该信噪比没有反映相位偏差对解调后信号平均功率的影响，这时计算误码率要带抽样判决器输入的信噪比。我们研究理论误码率时，都是在严格同步的条件下，此时误码率公式里所展示的 $a^2/2\sigma_n^2$ 与频带系统解调器输入的信噪比是一致的，但要清楚，这里的 a 是指抽样判决器的输入信号的幅度， σ_n^2 也是抽样判决器输入的噪声功率。由于 2PSK 解调器输入信号是 $\pm a\cos\omega_c t$ ，其平均功率即为 $a^2/2$ ，才有解调器输入信噪比 $r=a^2/2\sigma_n^2$ ，与误码率表达式中的一致，故误码率才用解调器输入信噪比来表示。一定不要忘了同步这个前提。（2）不同步时，不影响抽样判决器输入噪声的平均功率。

4. 分析：所谓巴克码 $\{x_1, x_2 \cdots x_n\}$ 是指若码长为 n ，则其自相关函数 $R(j)$ ，在 $j=0$ ，

$R(0)=n$ ， $j\neq 0$ ， $|R(j)|\leq 1$ 。其自相关函数为

$$R(j)=\sum_{i=1}^{n-j}x_i x_{i+j}=\begin{cases} n, & j=0 \\ 0\text{或}\pm 1, & 0<j<n \\ 0, & j>n \end{cases}$$

注意求和符号的上限如何取， $x_i x_{i+j}$ 是肯定的，注意， i 最小取 1，是从 1 开始取得，最大取什么？和 x_i 相乘的是 x_{i+j} ， $i+j$ 最大等于 n ，故 i 从 1 取到 $n-j$ 。该题求 $R(j)$ ，就没必要带进公式算了，用图解简单明了，码元相同输出 +1 电平，不同输出 -1 电平，最后相加即得对应的自相关函数。

解：5 位巴克码是 {11101}，其中“1”码取正电平“+1”，“0”码取负电平“-1”。其局部自相关函数为

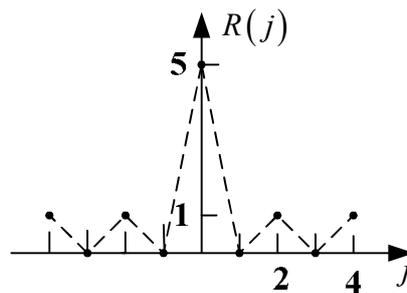
$$R(j) = \sum_{i=1}^{n-j} x_i x_{i+j} = \sum_{i=1}^{5-j} x_i x_{i+j}$$

$\tau=0$	$\tau=1$	$\tau=2$								
+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1								
+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1								
+1 +1 +1 +1 +1=5	+1 +1 -1 -1=0	+1 -1 +1=1								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\tau=3$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\tau=4$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">+1 +1 +1 -1 +1</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">+1 +1 +1 -1 +1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">+1 +1 +1 -1 +1</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">+1 +1 +1 -1 +1</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">-1 +1=0</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">+1=1</td> </tr> </table>			$\tau=3$	$\tau=4$	+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1	-1 +1=0	+1=1
$\tau=3$	$\tau=4$									
+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1									
+1 +1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1 +1									
-1 +1=0	+1=1									

由于自相关函数是偶函数，故

$$R(0) = 5; R(\pm 1) = 0; R(\pm 2) = 1; R(\pm 3) = 0; R(\pm 4) = 1$$

自相关函数曲线为



评注：用图解法做题在巴克码较长时往往比较简单直观。

6. 分析：在群同步中，假同步的概率为

$$P = 2^{-n} \sum_{r=0}^m C_n^r$$

其中， n 是巴克码的长度， m 是错码位数。

解：假同步概率

$$P = 2^{-n} \sum_{r=0}^m C_n^r$$

(1) 当 $m = 0$, 即不允许有错码时,

$$P = 2^{-7} \sum_{r=0}^0 C_7^r = 2^{-7} = \frac{1}{128}$$

(2) 当 $m = 1$, 即允许有 1 位错码时,

$$P = 2^{-7} \sum_{r=0}^1 C_7^r = 2^{-7} (1 + 7) = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$